

Požiadavky modernizácie demografickej štatistiky vo vzťahu k novým metódam graduácie pravdepodobností úmrtia. Testovanie, aplikácia a zhodnotenie nových metód graduácie.

Autor: Ján Mészáros

Pracovný materiál

Výskumné demografické centrum, INFOSTAT Bratislava 2016

Obsah

Teoreticko-metodologické zhodnotenie výpočtu úmrtnostných tabuliek a graduácie pravdepodobností úmrtia	3
Teoretické základy konštrukcie UT	4
Použitie ukazovateľov UT	8
Modifikácie konštrukcie UT	9
Niektoré možnosti extrapolácie pravdepodobnosti úmrtia vo vyšších vekoch	13
Testovanie, aplikácia a zhodnotenie vybraných modelov na Slovenských dátach.	15
Výpočet skrátených úmrtnostných tabuliek	16
Výpočet špeciálnych úmrtnostných tabuliek	19
Analytické zhodnotenie a testovanie rozdielov – analýza praktického využitia nových metód graduácie v podmienkach Slovenska	22
Návrh spracovania UT v ďalších rokoch	25
Príloha	26
Literatúra	35

Teoreticko-metodologické zhodnotenie výpočtu úmrtnostných tabuliek a graduácie pravdepodobností úmrtia

Úmrtnostné tabuľky (ďalej UT) sú najrozšírenejšími nástrojmi na zisťovanie úmrtnostných pomerov skúmanej populácie. Prvé UT boli vytvorené už v sedemnástom storočí, odvtedy sa metodika konštrukcie stále vyvíja a vznikli rôzne postupy na spresnenie výsledkov. Používajú sa nielen v demografii, ale aj v poisťovníctve, epidemiológii, gerontológii a aj iných vedných disciplínach. Sú to pravdepodobnostné modely popisujúce proces zomierania resp. prežitia na základe pravdepodobnosti úmrtia resp. prežitia z jedného presného veku do druhého.

Z metodického hľadiska UT delíme na **jednovýstupové** a **viacvýstupové** [6]. Hovoríme o viacvýstupových tabuľkách, keď pri výpočtoch berieme do úvahy aj vplyv iných procesov, ktoré môžu výsledky ovplyvniť. Príkladom môže byť dvojvýstupová UT, ktorá používa informácie o migrácii. Vzhľadom na známe problémy s presnosťou týchto dát sa tieto tabuľky nepoužívajú. V ďalšom sa budeme zaoberať výhradne len jednovýstupovými UT.

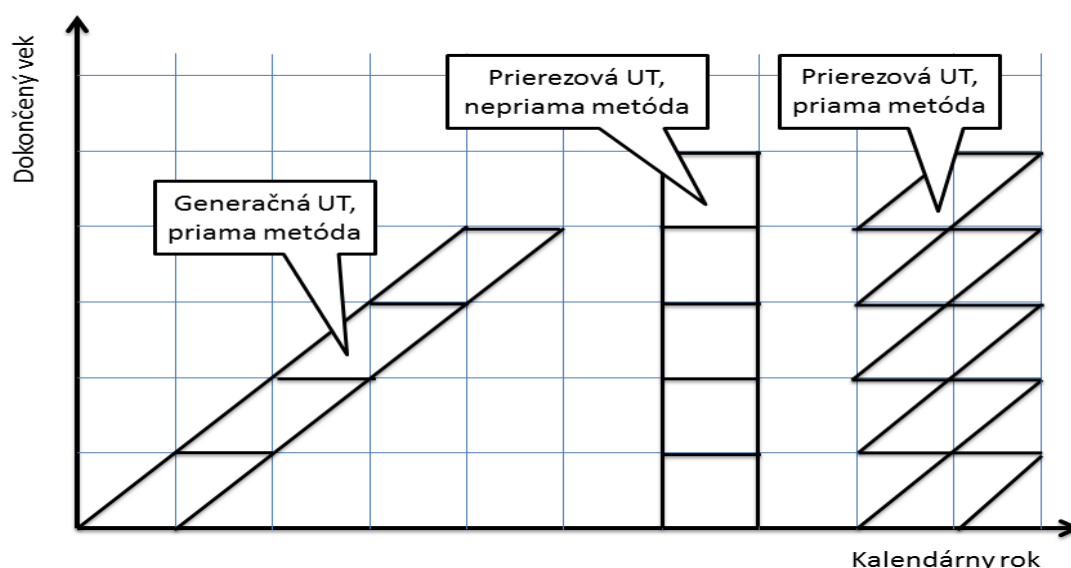
Z hľadiska charakteru vstupných dát UT delíme na UT počítané **priamou** alebo **nepriamou metódou**. O priamej metóde hovoríme, keď používame na výpočet údaje triedené podľa generácií a dokončeného veku, kým hovoríme o nepriamej metóde, ak používame údaje triedené podľa kalendárneho roku a dokončeného veku. Na Slovensku sa vo väčšej miere počítajú UT s nepriamou metódou, vzhľadom na prístupnosť dát.

Z hľadiska časového pokrytia UT delíme na **generačné** a **prierezové**. Hovoríme o prierezových UT, ak sa počítajú z údajov jedného alebo niekoľkých rokov. Generačné tabuľky sa počítajú z údajov za jednu generáciu od narodenia až po úplného vymretia, čiže údaje približne za 100 rokov. Je zrejmé, že generačné UT sa počítajú veľmi zriedka, vzhľadom na náročnosť získania údajov za také dlhé obdobie.

Z hľadiska podrobnosti vypočítaných údajov v UT, ich delíme na **úplné** a **skrátené**. Ak sa ukazovatele v UT počítajú pre každý dokončený vek, tak sa jedná o úplné UT. Ak nie sú k dispozícii dostatočné podrobné dáta na výpočet takýchto tabuliek, môžu sa počítať aj ukazovatele pre vekové skupiny. V tomto prípade sa jedná o skrátané UT.

V tomto materiáli sa budeme zaoberať iba **jednovýstupovými, úplnými, prierezovými UT počítané nepriamou metódou**.

Graf 1. Lexisov diagram znázorňujúci typy UT



Teoretické základy konštrukcie UT

Predpokladajme, že máme stacionárnu populáciu. Znamená to:

- Miery úmrtnosti sú nemenné v čase t.j. sú konštantné z roka na rok.
- Narodí sa rovnaký počet detí v čase t.j. každý rok sa narodí rovnaký počet detí
- Populácia je uzavretá voči migrácii t.j. je nulová migrácia

Označme l_0 ako počet narodených za daný rok. Je zrejmé, že počas roka niekto z týchto detí zomrie. Označme l_1 ako počet osôb, ktorí sa dožili veku 1. Potom platí:

$$l_1 = l_0 \cdot p_0$$

kde p_0 je z intervalu $(0,1>$ a nazýva sa pravdepodobnosť prežitia z veku 0 na vek 1. Toto môžeme zovšeobecniť na ľubovoľný vek x , a to:

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x$$

čiže l_x resp. l_{x+1} je počet osôb žijúcich v presnom veku x resp. vo veku $x+1$, p_x je pravdepodobnosť prežitia z presného veku x do veku $x+1$. Označme:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Je to počet zomrelých medzi vekmi x a $x+1$. Ďalej platí:

$$d_x = l_x - l_x \cdot p_x = l_x \cdot (1 - p_x) = l_x \cdot q_x$$

kde q_x je pravdepodobnosť úmrtia vo veku x a platí:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Môžeme ďalej vypočítať, že koľko rokov prežili osoby medzi vekmi x a $x+1$. Je zrejmé, že osoby, ktorí sa dožili veku $x+1$ sa dožili l_{x+1} rokov. K tomu treba ešte pripočítať roky, ktoré prežili osoby, ktorí zomreli medzi vekmi x a $x+1$. Tých osôb je d_x . Niektorí prežijú mesiac t.j. $1/12$ roka, niektorí dva t.j. $1/6$ roka, niektorí desať mesiacov t.j. $10/12$ roka, niektorí jedenásť mesiacom t.j. $11/12$ roka. Súčet týchto hodnôt môžeme odhadnúť s výrazom $d_x \cdot a_x$, kde a_x je medián podielov. Potom môžeme napísať nasledovné:

$$L_x = l_{x+1} + d_x \cdot a_x \quad \text{alebo} \quad L_x = l_x - d_x (1 - a_x)$$

kde L_x je počet rokov prežitých osobami medzi vekmi x a $x+1$ a a_x je z intervalu $(0,1)$.

Teraz môžeme vypočítať aj počet rokov života, ktoré prežijú osoby vo veku x do konca života, a to nasledovne:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{\omega-1} = \sum_{i=x}^{\omega-1} L_i$$

kde ω je vek v ktorom už nikto nežije. Ω sa nazýva **hraničný vek**. Ak toto spriemerujeme na jednu osobu dostaneme:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

kde e_x je priemerný počet rokov prežitých osobou vo veku x do konca života v našej stacionárnej populácii.

Ak teraz zoradíme takto vypočítane premenné do tabuľky, dostaneme UT s nasledujúcimi stĺpcami:

x presný vek, nadobúda hodnoty $0, 1, 2, \dots, \omega-1$

l_x počet osôb žijúcich v stacionárnej populácii (nazýva sa to aj tabuľkový počet) v presnom veku x

p_x pravdepodobnosť prežitia z veku x do veku $x+1$ (často sa uvádza $q_x = 1-p_x$ ako pravdepodobnosť úmrtia vo veku x)

d_x počet zomrelých medzi vekmi x a $x+1$ v stacionárnej populácii

L_x počet prežitých rokov osobami z veku x do veku $x+1$ v stacionárnej populácii

T_x počet prežitých rokov osobami z veku x do konca života v stacionárnej populácii

e_x priemerný počet rokov prežitých osobou vo veku x do konca života stacionárnej populácii. Nazýva sa v demografickej terminológii **stredná dĺžka života vo veku x** . Pre vek nula má názov **stredná dĺžka života pri narodení**.

Je zrejmé, že počet riadkov tabuľky je ω .

Na reálnu konštrukciu takejto UT je potrebné zadať resp. vypočítať hodnoty l_0 , a_x a p_x resp. q_x pre všetky x . Vyberme si stacionárnu populáciu, kde sa ročne narodí 100000 ľudí. Čiže $l_0 = 100000$. Koeficienty a_x sú priemerom podielov človekorokov prežitých od veku x po vek $x+1$. Môžeme predpokladať, že okrem veku $x = 0$ sa vo všetkých vekoch sú úmrtia rozložené rovnomerne. Takže môžeme zvoliť $a_x = 0,5$ pre všetky $x > 0$. Veku 0 musíme venovať podrobnejšiu pozornosť, lebo vieme, že úmrtia detí sa koncentruje viac do prvej polovice roka. Konkrétne v roku 2014 bolo až 92% úmrtí detí v prvom polroku života. To znamená, že prežili menej ako pol roka. Medián týchto hodnôt je približne 0,1. Takže si zvolíme $a_0 = 0,1$.

S vypočítaním q_x je to komplikovanejšie. Zoberme si našu skutočnú populáciu a zistíme nasledovné hodnoty. Označme:

D_x ako počet zomrelých osôb vo veku x , kde x je $0,1,\dots,\omega-1$

P_x ako priemerný počet žijúcich osôb vo veku x , kde x je $0,1,\dots,\omega-1$

Vieme, že špecifická miera úmrtnosti je :

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}$$

Ak by bola naša populácia stacionárna a $a_x = 0,5$, tak môžeme napísať :

$$m_x = \frac{D_x}{P_x} = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} = \frac{\frac{2d_x}{l_x}}{\frac{l_x + l_{x+1}}{l_x}} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

po úprave dostaneme:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x} \quad (1)$$

Je zrejmé, že takto vypočítaná pravdepodobnosť úmrtia sa zakladá na časovom intervale jeden rok. V skutočnosti sa táto pravdepodobnosť môže meniť na ľubovoľnom menšom intervale, dokonca aj v časovom okamžiku $\tilde{x}$. Označme spojitú funkciu:

$l(\tilde{x})$ ako počet žijúcich osôb v časovom okamžiku $\tilde{x}$

$d(\tilde{x})$ ako počet zomrelých v časovom okamžiku $\tilde{x}$

Potom dostaneme:

$$d(\tilde{x}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{l(\tilde{x}) - l(\tilde{x} + \Delta \tilde{x})}{\Delta \tilde{x}} = -l'(\tilde{x})$$

kde znak $'$ znamená deriváciu funkcie $l(x)$. Potom dostaneme, že pravdepodobnosť úmrtia v časovom okamžiku $\tilde{x}$ je:

$$q(\tilde{x}) = \frac{d(\tilde{x})}{l(\tilde{x})} = \frac{-l'(\tilde{x})}{l(\tilde{x})} = \mu(x)$$

Funkcia $\mu(x)$ udáva okamžitkovú mieru úmrtnosti a nazýva sa **sila úmrtnosti**. Ak vypočítame priemernú hodnotu $\mu(x)$ od bodu x po bod $x+1$ dostaneme odhad špecifickej miery úmrtnosti:

$$m_x = \int_x^{x+1} \mu(x) = \int_x^{x+1} \frac{l'(x)}{l(x)} dx = -(\ln l(x+1) - \ln l(x)) = -\ln \frac{l(x+1)}{l(x)} = -\ln(p_x) = -\ln(1-q_x)$$

kde $\ln$ je prirodzený logaritmus. Po úprave dostaneme:

$$q_x = 1 - e^{-m_x} \quad (2)$$

Pravdepodobnosti úmrtia vypočítané so vzorcami (1) alebo (2) dávajú prakticky rovnaké výsledky pre jednotlivé veku (x), inak povedané malé rozdiely neovplyvnia výpočet ďalších ukazovateľov UT (pozri Tabuľku 1 v prílohe tohto dokumentu). V praxi sa pri výpočte úplných UT používa vzorec (2), je to tak aj pri výpočte podrobných UT pre Slovensko.

Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu úplnej UT. Prevedieme to na údajoch populácie Slovenska v roku 2014.

Zvolíme si $l_0 = 100000$, $a_0 = 0,1$, $a_x = 0,5$ pre všetky ostatné veku, q_x vypočítame podľa vzorca (2). Postupne vypočítame:

$$d_0 = l_0 \cdot q_0, L_0 = l_0 - 0,9 \cdot d_0 \text{ potom pre všetky } x > 0 \quad l_{x+1} = l_x - d_x, d_x = l_x \cdot q_x, L_x = l_x - 0,5 \cdot d_x$$

Treba upozorniť na vek ω . Je zrejmé, že tu vzorec (2) nie je definovaný (v menovateli m_ω je nula), a tak tu musíme zvoliť pravdepodobnosť prežitia $p_\omega = 1 - q_\omega = 0$. Z toho $q_\omega = 1$. Výsledok je v prílohe v Tabuľke 2. Je zrejmé, že takáto tabuľka má niekoľko nedostatkov. V prvom rade sú to hodnoty pre vysoké veku, hlavne nad sto rokov. Vzhľadom na nízky, niekedy aj nulové počty zomrelých sa vypočítané pravdepodobnosti úmrtia veľmi deformujú, čo vplýva na ostatné ukazovatele tabuľky. Rieši sa to tak, že sa zvolí nižší hraničný vek, ako je v skutočnosti a posledný riadok sa upraví podľa nejakej metódy. Sú rôzne metódy ako to vyriešiť [11], [7].

Štatistický úrad SR (ŠÚ SR) používa pri výpočte úplných UT metódu popísanú v [6], [7]. Za hraničný vek sa umelo zvolí 101 rokov. Riadok pre vek $\omega-1 = 100$ sa upraví nasledovne:

$$d_{\omega-1} = l_{\omega-1}, L_{\omega-1} = l_{\omega-1} - l_{\omega-1} \cdot q_{\omega-1}/2, T_{\omega-1} = L_{\omega-1}, e_{\omega-1} = \frac{T_{\omega-1}}{l_{\omega-1}} \quad (3)$$

Takto modifikovaná UT je v prílohe v Tabuľke 3.

Ďalšia metóda je popísaná v [11], [7]. Riadok pre vek $\omega-1 = 100$ sa upraví nasledovne:

$$d_{\omega-1} = l_{\omega-1}, L_{\omega-1} = \frac{l_{\omega-1}}{\frac{D_{\omega-1}}{P_{\omega-1}}}, T_{\omega-1} = L_{\omega-1}, e_{\omega-1} = \frac{1}{\frac{D_{\omega-1}}{P_{\omega-1}}} \quad (4)$$

Takto modifikovaná UT je v prílohe v Tabuľke 4. Ak porovnáme túto tabuľku s predchádzajúcou zistíme, že priemerný počet rokov prežitých vo veku 100 rokov (e_{100}) je podstatne vyššia pri metóde (4) ako pri metóde (3). Prejaví sa to aj vo veku 0, kde hodnota e_0 pri metóde (4) je prakticky rovnaká s hodnotou pri nemodifikovanej UT (Tabuľka 2). Samozrejme je otázne, či metóda (3) alebo (4) je lepšia, lebo nevieme ani to posúdiť, či Tabuľka 2 je vhodným odhadom skutočnosti.

Použitie ukazovateľov UT

Význam hodnôt jednotlivých stĺpcov UT sme už vysvetlili. Najviac sa používajú pravdepodobnosti úmrtia z veku x do veku $x+1$ a stredné dĺžky života vo veku x , kde x je z intervalu $<0, \omega$). Z UT sa dajú vypočítať aj ďalšie ukazovatele:

Pravdepodobnosť dožitia z veku x do veku y : $\frac{l_y}{l_x}$

Napr. pravdepodobnosť, že sa práve narodené dieťa dožije veku 20 rokov z tabuľky 5 je $99025/100000 = 0,99025$. Pravdepodobnosť, že sa 20 ročná osoba dožije 65 rokov je $82453/99025 = 0,833$.

Pravdepodobnosť úmrtia medzi vekmi x a y : $1 - \frac{l_y}{l_x}$

Pravdepodobná dĺžka života:

Je to vek v UT v ktorom tabuľkový počet žijúcich osôb je $l_0/2$. Je to medián tabuľkových dožívajúcich. Niekedy sa uvádza vek, v ktorom je l_x najbližšie k $l_0/2$.

Normálna dĺžka života:

Je to vek v UT v ktorom tabuľkový počet zomrelých d_x je najväčší. Je to modus tabuľkových zomrelých.

95% interval spoľahlivosti pravdepodobnosti úmrtia q_x [8]:

$$P(\widehat{q}_x - 1,96 \cdot s(\widehat{q}_x) < q_x < \widehat{q}_x + 1,96 \cdot s(\widehat{q}_x)) = 0.95 \quad (5)$$

kde $\widehat{q}_x$ je vypočítaná pravdepodobnosť úmrtia a $s(\widehat{q}_x)$ je smerodajná odchýlka vypočítaná nasledovne:

$$s(\widehat{q}_x) = \sqrt{\widehat{q}_x^2 \cdot (1 - \widehat{q}_x) / D_x}$$

Interval spoľahlivosti strednej dĺžky života e_x [8]:

$$P(\widehat{e}_x - 1,96 \cdot s(\widehat{e}_x) < e_x < \widehat{e}_x + 1,96 \cdot s(\widehat{e}_x)) = 0.95 \quad (6)$$

kde $\widehat{e}_x$ je vypočítaná pravdepodobnosť úmrtia a $s(\widehat{e}_x)$ je smerodajná odchýlka vypočítaná nasledovne:

$$s(\widehat{e}_x) = \sqrt{\sum_{i=x}^{\omega-1} (\widehat{p}_x (1 - \widehat{a}_i + \widehat{e}_{i+1}))^2 s^2(\widehat{p}_i)} \quad \text{kde}$$

$$s(\widehat{p}_x) = s(\widehat{q}_x) = \sqrt{\widehat{q}_x^2 \cdot (1 - \widehat{q}_x) / D_x}$$

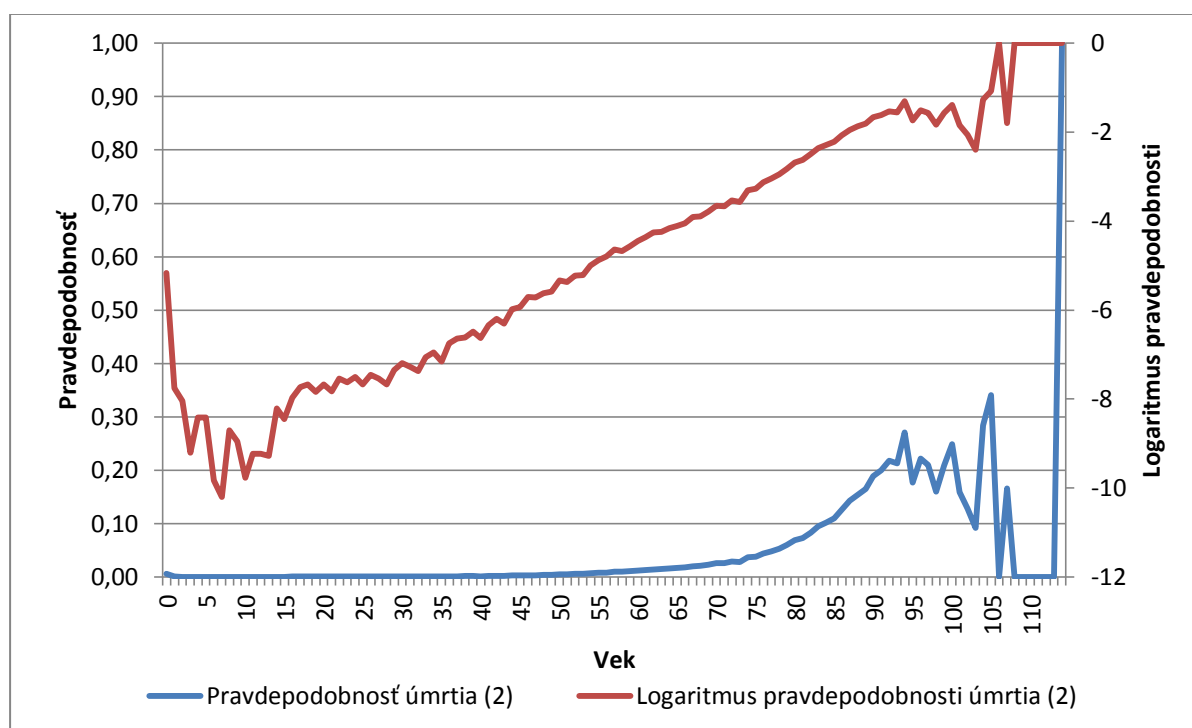
$${}_k\widehat{p}_x = \widehat{p}_x \cdot \widehat{p}_{x+1} \cdot \widehat{p}_{x+2} \cdots \widehat{p}_{x+k-1}$$

Modifikácie konštrukcie UT

Základným problémom konštrukcie UT sú, že spojité teoretické pravdepodobnosti úmrtia (resp. prežitia) sa odhadujú štatistickými výpočtami s reálnych dát, ktoré sú triedené do relatívne veľkých vekových intervalov. Inak povedané okamžité pravdepodobnosti úmrtia sa nahradzujú pravdepodobnosťami vypočítané za ročný vekový interval. Toto vyvolá nesystematické nepravidelnosti.

Na grafe 1 sú zobrazené pravdepodobnosti úmrtia populácie Slovenska z roku 2014 (modrý graf). Je zrejmé, že vo vekoch nad 90 rokov sú veľké nepravidelnosti, ktoré sa dajú vysvetliť malým počtom úmrtí a veľkými výkyvmi v ich počtoch. Podobné výkyvy sú aj vo vekoch 4 až 20 rokov, ktoré síce modrý graf nemôže zobraziť, vzhľadom na malé hodnoty, ale s logaritmovaním hodnôt sa zvýraznia. Takže prakticky na celom vekovom intervale sú nežiaduce výkyvy, ktoré by bolo potrebné odstrániť, aby sme sa priblížili k skutočným spojitým hodnotám pravdepodobnosti úmrtia. Takéto metódy nazývame **vyrovnávanie** resp. **graduácie**.

Graf 2.: Pravdepodobnosť úmrtia (2) podľa veku, Slovensko 2014.



Na vyrovnávanie hodnôt pravdepodobností sa používajú rôzne postupy:

- Grafická metóda
- Metóda kĺzavých priemerov
- Extrapoláčne metódy

Grafické metódy sa zakladajú na manuálnom vyrovnaní krivky pravdepodobnosti na grafe a následné odčítanie tak vzniknutých hodnôt. Vzhľadom na veľkú subjektivitu takýchto metód a existencie sofistikovanejších metód sa už súčasnosti nepoužívajú.

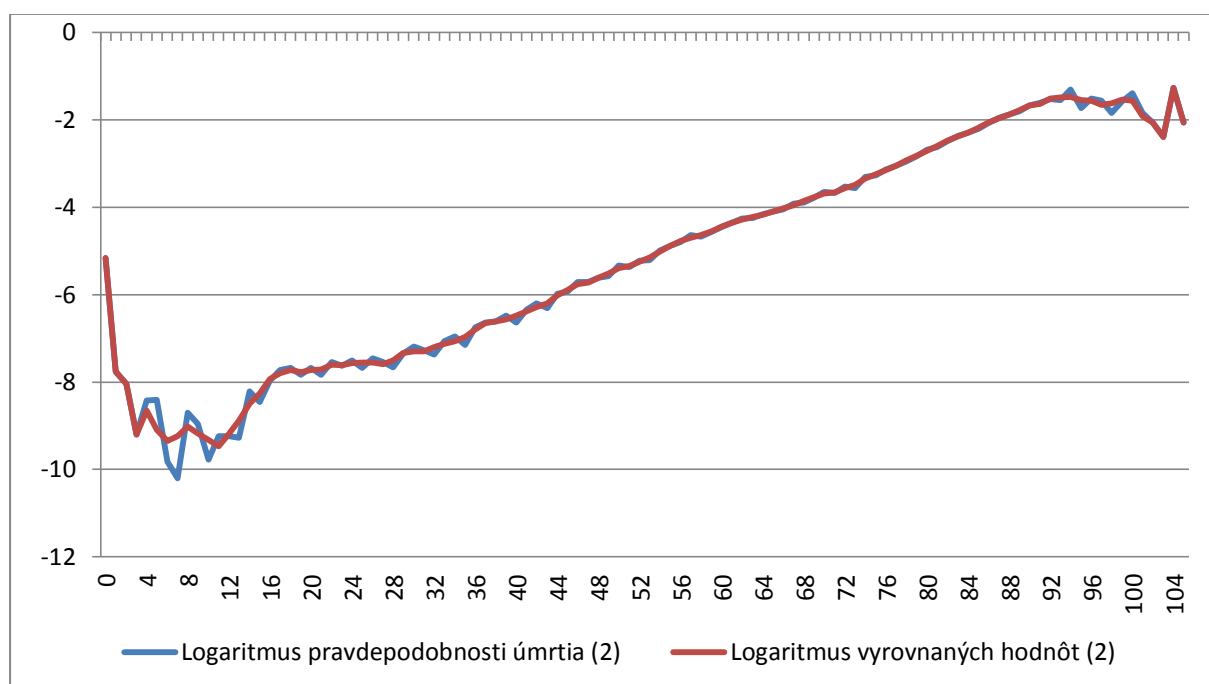
Metódy kĺzavých priemerov sa používajú na odstránenie výkyvov malých rozmerov. V našom prípade UT sú vhodné na vyrovnanie hodnôt pre mladšie veky, kde výkyvy pravdepodobnosti úmrtia vyplývajú z veľmi nízkych hodnôt, ktoré sú dôsledkom malých počtov zomrelých a veľkých počtov žijúcich. Tieto metódy sa dajú vyjadriť nasledujúcim vzorcom:

$$\widehat{q}_x = \sum_{k=-r}^r b_k \cdot q_{x+k}$$

Kde $\widehat{q}_x$ sú vyrovnané hodnoty pravdepodobnosti úmrtia, b_k sú vhodne zvolené konštanty a q_{x+k} sú pôvodné pravdepodobnosti úmrtia. V literatúre sa dajú najst rôzne konkrétne formy tohto vzorca. Pri výpočte UT za Slovensko sa používa výraz:

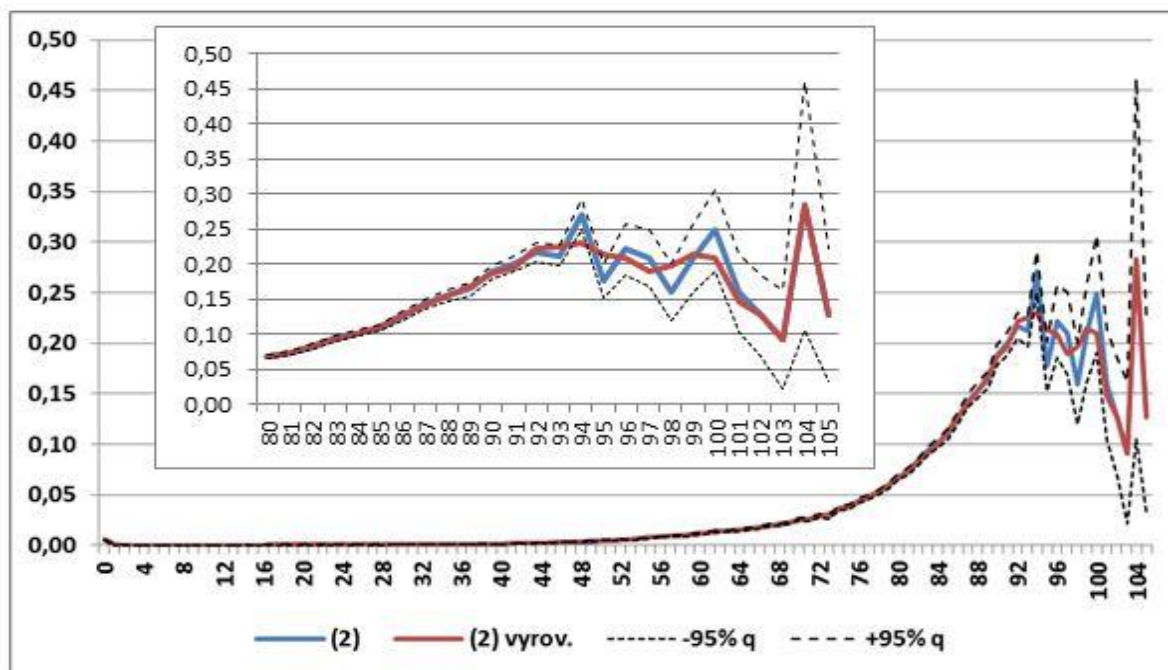
$$\widehat{q}_x = -2/21 \cdot \widehat{q}_{x-3} + 1/7 \cdot \widehat{q}_{x-2} + 2/7 \cdot \widehat{q}_{x-1} + 1/3 \cdot q_x + 2/7 \cdot q_{x+1} + 1/7 \cdot q_{x+2} - 2/21 \cdot q_{x-3} \quad (7)$$

Graf 3.: Porovnanie vypočítaných pravdepodobností úmrtia (2) s vyrovnanými hodnotami pomocou (7), Slovensko 2014.



Z grafu 3 je zrejmé, že náhodné výkyvy v postupnosti úmrtia sú prakticky vyhladené po použití (7). Problematicky vyzerajú veky do 15 rokov a veky nad 90 rokov. S mladšími vekmi nie je potrebné sa zaoberať, lebo sú to veľmi malé pravdepodobnosti, ktoré neovplyvňujú resp. veľmi málo ovplyvňujú výslednú UT. U vyšších vekoch je to iné, tu metódy kĺzavých priemerov nedokážu vyrovnať pravdepodobnosti, tak aby odstránili výkyvy pôsobené veľkými štatistickými odchýlkami v vstupných dátach vyplývajúcich hlavne s nerovnomerným rozdelením malého počtu zomrelých v starších vekoch populácie. Môžeme tieto odchýlky demonštrovať zobrazením intervalmi spoľahlivosti pre pravdepodobnosti vypočítané s (2) (Graf 4).

Graf 4: Pravdepodobnosti úmrtia (2), vyrovnané pravdepodobnosti úmrtia (7) a 95% interval spoľahlivosti, Slovensko 2014.



V praxi sa uvedené veľké odchýlky vypočítaných pravdepodobností vo vyšších rokoch riešia extrapoláciou, to znamená, že empirické hodnoty sa nahradia modelovými hodnotami. ŠÚ SR pri výpočte UT používa **Compertz-Makehamovu** funkciu na výpočet $\widetilde{q}_x = 1 - \widetilde{p}_x$ nasledovne:

$$\ln \widetilde{p}_x = A + B \cdot C^x \quad (8)$$

Parametre modelu A, B, C sa vypočítajú na základe **King-Hardyho** metódy [9] nasledovne:

$$R1 = \sum_{i=60}^{67} \ln p_i$$

$$R2 = \sum_{i=68}^{75} \ln p_i$$

$$R3 = \sum_{i=76}^{83} \ln p_i$$

$$C8 = \frac{R3 - R2}{R2 - R1}$$

$$A = \left(R1 - \frac{R2 - R1}{C8 - 1} \right) / 8$$

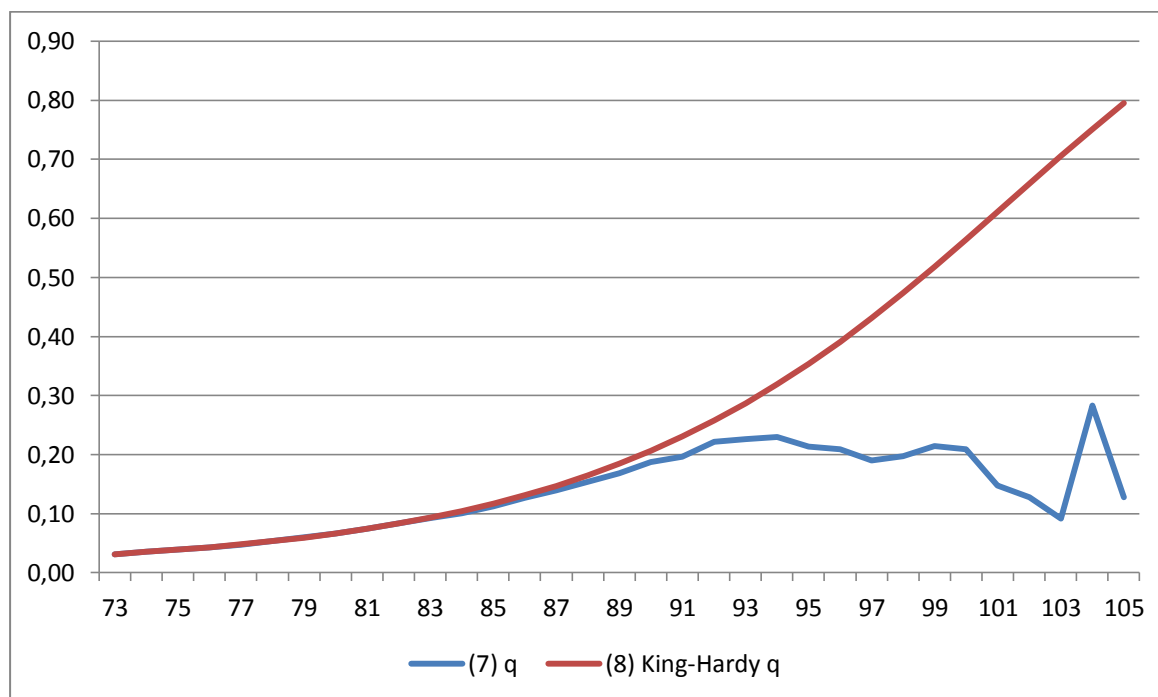
$$C = \sqrt[8]{C8}$$

$$B = \frac{(C - 1) \cdot (R2 - R1)}{C^{60} \cdot (C8 - 1)^2}$$

Hodnoty $\widetilde{q}_x$ sa vypočítajú pre veky x od 76 až $\omega - 1$. Potom sa vypočítajú pre veky 76 až 85 rokov diferencie medzi $\widetilde{q}_x$ a empirickými hodnotami q_x . Od veku, kde je táto diferencia najmenšia sa hodnoty q_x nahradia hodnotami $\widetilde{q}_x$. V grafe 4 je znázornená extrapolácia pravdepodobností úmrtia metódou (8). Výsledná UT vypočítaná touto metódou je v prílohe v Tabuľke 6. Ako tam vidno,

stredná dĺžka života pri narodení sa znížila o 0,23 roka. Je to dôsledok toho, že sme výrazne zvýšili pravdepodobnosti úmrtia pre veky nad 90 rokov.

Graf 5.: Pravdepodobnosti úmrtia vypočítané metódou (7) a (8), Slovensko 2014.



Ako z grafu 5 vyplýva problémovou časťou uvedenej metodiky sú pravdepodobnosti úmrtia v starších vekoch nad 90 rokov veku. Extrapolované hodnoty sa veľmi líšia od empirických. Posúdenie, či empirické hodnoty sú správnym odhadom pravdepodobnosti, je tiež otázne. Klesajúca tendencia pravdepodobnosti úmrtia vo vysokých vekoch je nereálna. Hoci autor článku [5] tvrdia, že pokles úmrtnosti vo vysokých vekoch je nová etapa vo vývoji úmrtnosti, ale v článku [5] autor nenašiel relevantné dôkazy o systematickom poklese. Pokles empirických hodnôt je možné pripísať aj k chybám v evidencii žijúcich osôb starších ako 100 rokov. Takže nám zostáva prikloniť sa k teórii, že pravdepodobnosti úmrtia majú rásť a z toho potreba empirické hodnoty nahradiť extrapoláciou. Aj v tomto smere existujú rôzne teórie [2], ktoré hovoria o tom, že pravdepodobnosti úmrtia vo vysokých vekoch sa prudko približujú jednotke, alebo sa limitne približujú jednotke, alebo sa limitne približujú hodnote, ktorá vychádza z mier úmrtností rovnej 1, a to $1 - e^{-1} = 0,6$. Vzhľadom na to, ako autor v článku [9] konštatoval, neexistuje zrovnateľný štandard, nie je čím porovnať výsledky rôznych výpočtov, je možné sa prikloniť všetkým uvedeným teóriám.

Vzhľadom na to, že pravdepodobnosti úmrtia sú základom konštrukcie UT a hlavným výstupom týchto tabuliek sú ukazovatele stredných dĺžok života, je dôležité sledovať ich zmeny pri použití rôznych modelov na extrapoláciu pravdepodobnosti. Jedno z kritérií pri posudzovaní modelov by mohlo byť posúdenie veľkosti strednej dĺžky života pri narodení. Pri veľkých hodnotách by sme mohli hovoriť o optimistických metódach pri nízkych hodnotách o pesimistických metódach [2]. Ďalšia možnosť výberu metód, ktorá dáva správnu strednú dĺžku života pri narodení, by mohla byť, či táto hodnota padne do intervalu spoľahlivosti strednej dĺžky života pri narodení vypočítanej z empirických hodnôt pravdepodobnosti úmrtia.

Niektoré možnosti extrapolácie pravdepodobnosti úmrtia vo vyšších vekoch

Je zrejmé, že s problémom modelovania úmrtnosti sa už analytici zaoberajú dávno a vo veľkej miere. Dôkazom toho môže byť aj zoznam modelov uvedených v [11] (pozri Tabuľka 7). Dajú sa použiť na odhad hodnôt pre q_x , p_x a μ_x , následne čoho sa dajú konštruovať UT. Samozrejme, že tieto modely boli vytvorené na modelovanie úmrtnosti vo všetkých vekoch, ale nevylučuje sa ich použitie len na vyššie veku. Ich otestovanie na tieto účely by boli dosť náročné, nie len časove, ale aj z pohľadu náročnosti metodicky na odhad parametrov. Tento zoznam modelov by sa mohol rozšíriť aj o ďalšie. Príkladom môžu modely uvedené napríklad v publikáciách [10], [7], [2], [3]. Tu sa už autori zaoberajú o modelovanie úmrtnosti vo vyšších vekoch, čo z pohľadu našej úlohy vyhovuje. V ďalšom sa budeme zaoberať podrobnejšie s niektorými z týchto modelov a použijeme slovenské dáta pri ich testovaní. Použili sme nasledovné modely (pracovné názvy sú uvedené zvýrazneným písmom):

King-Hardy 2 (model je popísaný v [9]):

Princíp výpočtu modelu je rovnaký s výpočtom (8), len parametre modelu sú odhadnuté na vekových intervaloch 66-73, 74-81 a 82-89 namiesto intervalov 60-67, 68-75 a 76-83.

Gompertz (model je popísaný v [10]):

$$\mu_x = a * e^{b*x}$$

kde a a b sú parametre modelu.

Makeham (model je popísaný v [10]):

$$\mu_x = c + a * e^{b*x}$$

Logistic (model je popísaný v [10]):

$$\mu_x = c + \frac{a.e^{b.x}}{1+d.e^{b.x}}$$

kde a , b , c , d sú parametre modelu.

Kannisto 1 (model je popísaný v [10], identický model je v [2] popísaný ako Thatcher):

$$\mu_x = c + \frac{a.e^{b.x}}{1+a.e^{b.x}}$$

kde a , b , c sú parametre modelu

Kannisto 2 (model je popísaný v [3]):

$$\mu_x = \frac{e^{(a+b.(x-k))}}{1+e^{(a+b.(x-k))}} \quad \text{pre } x \geq k$$

kde a , b sú parametre modelu. K je vek od ktorého sa model odhaduje.

Weinbull (model je popísaný v [10]):

$$\mu_x = a * x^b$$

kde a, b sú parametre modelu.

Heligman & Pollard (model je popísaný v [10]):

$$q_x = \frac{a.e^{b.x}}{1+a.e^{b.x}}$$

kde a, b sú parametre modelu.

Quadratic (model je popísaný v [10]):

$$\ln(\mu_x) = a + b.x + c. x^2$$

kde a, b, c sú parametre modelu.

Pastor (model je popísaný v [7]):

$$\ln(\mu_x) = a + b.x + c. x^2 + d. x^3$$

kde a, b, c, d sú parametre modelu. Je to vlastne kubická funkcia.

Coale-Kisker (metóda je popísaná v [3]):

$$m_x = m_{x-1} \cdot e^{k_{80} + (x-80).s} \quad \text{pre } x \geq 80$$

$$s = - \frac{\ln\left(\frac{m_{79}}{m_{110}}\right) + 31.k_{80}}{465}$$

Denuit-Godermiaux 1 (metóda je popísaná v [3]):

$$\ln(q_x) = a + b.x + c. x^2$$

kde a, b, c sú parametre modelu.

Denuit-Godermiaux 1 (metóda je popísaná v [3]):

$$\ln(q_x) = (x_{\max}^2 - 2.x.(x_{\max}) + x^2).c$$

kde c je parameter modelu a $x_{\max}$ bol zvolený vek 120.

Beard (metóda je popísaná v [2]):

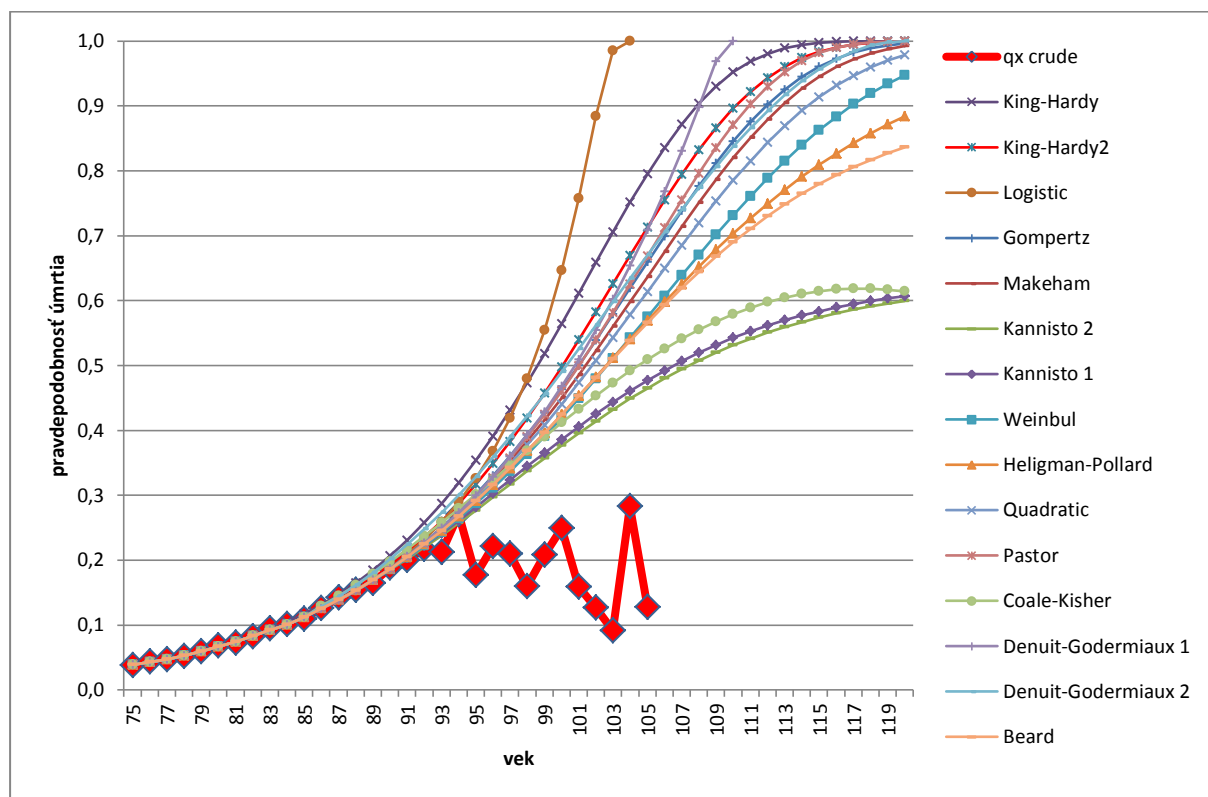
$$m_x = \frac{a.e^{b.x}}{1+d.e^x}$$

kde a, b, d sú parametre modelu.

Testovanie, aplikácia a zhodnotenie vybraných modelov na Slovenských dátach.

Parametre modelov uvedených vyššie, okrem modelov King-Hardy a Coale-Kisher, boli odhadnuté na vekovom intervale 75 až 90 rokov pomocou systému SAS/STAT® 14.1. Parametre boli vypočítané metódami nelineárnych najmenších štvorcov použitím procedúry NLIN. Extrapolácie boli zvolené od veku 86 rokov. Výsledné pravdepodobnosti úmrtia q_x sú zobrazené na grafe 6.

Graf 6.: Pravdepodobnosti úmrtia vypočítané pre vybrané modely, Slovensko 2014.



Ako vidno, všetky použité modely spĺňajú podmienku rastúcej q_x . Dajú sa rozdeliť do troch skupín. V prvej skupine sú modely, ktoré dávajú pravdepodobnosti úmrtia už relatívne nízkom veku (110 rokov) hodnotu 1. Sú to modely „Logistic“ a „Denuit-Godermiaux 1“. Ako druhú skupinu môžeme označiť modely, ktorých hodnoty sa približujú vo vysokých vekoch k číslam 0,6 – 0,7. Sem patria modely „Kannisto 1“, „Kannisto 2“ a „Coale-Kisher“. Ostatné modely z nášho výberu dávajú pravdepodobnosti, ktoré dosiahnu hodnotu 1 vo vysokých vekoch mimo nášho použitého hraničného veku 120 rokov.

Výpočet skrátených úmrtnostných tabuliek

Vieme, že na výpočet úplných UT potrebujeme informácie o počte zomretých a žijúcich osôb v jednoročných vekových skupinách. Tieto informácie však na jednej strane nie sú vždy k dispozícii a na druhej strane nespĺňajú ďalšie kritériá. Medzi ďalšie kritériá patrí veľkosť populácie. Ako v [13] je uvedené **pri populácii menšej ako 5000 osôb sa UT nemali počítať** s dôvodu veľkej štandardnej chyby stredných dĺžok života. V tomto prípade sa odporúča použiť **modelové úmrtnostné tabuľky**, ktoré sú popísané v [12]. V Slovenskej praxi sa takéto tabuľky nepočítajú. Ďalšie kritérium počítania úplných UT sú nulové položky zomrelých v niektorých vekoch. Tieto položky taktiež zvyšujú štandardnú chybu vypočítaných stredných dĺžok života. Riešenie môže byť inputácia týchto núl nenulovými hodnotami. Môžu to byť hodnoty napr. 0,01, alebo hodnoty, ktoré sa získajú spriemerovaním hodnôt tej vekovej skupiny z predchádzajúcich rokov. Ďalšie riešenie je použiť **skrátené UT**, ktoré sa zakladajú na dátach triedených viacročných vekových skupinách, čím sa vo väčšine prípadov nulové hodnoty odstraňuje. Najčastejšie sa používajú päťročné, alebo desaťročné vekové intervaly so špeciálnou výnimkou, a tak, že prvý interval zahŕňa len 0 ročných, ďalej je interval 1-4 ročných a postupne 5-9, 10-14,... Posledný interval je 85 a viac ročných, alebo 95 a viac ročných. Vek 0 je vybraný z dôvodu, aby sa dal počítať stredná dĺžka života pri narodení, čo je hlavným výstupom UT. Označme:

${}_nD_x$ Priemerný počet zomrelých vo veku x až $x+n$, n je dĺžka vekového intervalu.

${}_nP_x$ Priemerný počet žijúcich vo veku x až $x+n$

Postup výpočtu je nasledovný:

- Pravdepodobnosť úmrtia: ${}_nq_x = \frac{2{}_n m_x}{2 + {}_n m_x}$, kde ${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x}$, ${}_n D_x$ je počet zomrelých vo veku x až $x+n$, ${}_n P_x$ je počet žijúcich vo veku x až $x+n$

- Ďalej sa postupne vypočítavajú nasledovné ukazovatele:

$$l_{x+n} = l_x \cdot (1 - {}_nq_x)$$

$${}_n d_x = l_{x+n} - l_x$$

$${}_n L_x = (l_x + l_{x+n})/2$$

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{85+}$$

$$e_x = T_x / l_x$$

pričom $L_0 = l_0 - a_0 \cdot d_0$, $l_0 = 100000$ a $a_0 = 0,5$

Posledný riadok tabuľky v prípade, ak sa jedná o vekový interval 85+ rokov, sa upraví nasledovne (obdobne je to ja v prípade vekového intervalu 95+ rokov):

$$L_{85+} = l_{85}/m_{85}, \text{ kde } m_{85} = D_{85+}/P_{85+}, D_{85+} \text{ je počet zomrelých vo veku 85 a viac, } P_{85+} \text{ je počet žijúcich (stredný stav) vo veku 85 a viac.}$$

$$T_{85+} = L_{85+}$$

$$e_{85+} = 1/m_{85}$$

Ako z uvedeného algoritmu vidno, pri výpočte skrátených UT sa nepoužívajú graduačné metódy. Sú hrubým odhadom UT, takže je účelné uprednostniť počítanie úplných UT. Treba poznamenať aj to, že algoritmy úplnej UT a skrátenej UT nedávajú presne rovnaké hodnoty strednej dĺžky života pri narodení, čiže nie je na mieste počítať aj úplné a skrátené UT pre tú istú populáciu. Je pravidlo, že ak sa počítajú úplné UT, skrátené sa nepočítajú. Ak však niekto chce publikovať UT skrátenej forme (ŠÚ SR publikuje úplné UT aj skrátenej forme), je tu riešenie na pretransformovanie úplnej UT na skrátenú formu nasledovne:

L_x je priemerné počet rokov prežitých osobami vo veku x

L_y^s je priemerný počet rokov prežitých osobami vo vekovej skupine y

n_y je počet rokov vo vekovej skupine

$$L_y^s = \frac{\sum_{\forall i \in y} L_i}{n_y} \quad \text{pre všetky vekové skupiny y}$$

$$T_y^s = \sum_{\forall j \geq y} n_y L_j^s \quad \text{pre všetky vekové skupiny y}$$

$$l_0 = 100000, \quad d_0 = (l_0 - L_0) / 0,9$$

$$l_1 = l_0 - d_0$$

$$l_y = L_{y-1} \cdot 2 - l_{y-1} \quad \text{pre } y \geq 2$$

$$d_y = l_{y+1} - l_y \quad \text{pre } y \geq 1$$

$$q_y = 1 - l_{y+1} / l_y$$

$$e_y = T_y / l_y$$

Najčastejšie sa skrátené UT používajú na regionálnej úrovni. Tu sa stretávame s problémami s nízkym počtom žijúcej populácie, čo vyvoláva aj nízky počet zomrelých. V niektorých vekových skupinách sa počty zomrelých blížia k nule, čo vyvolá zvýšenú nepresnosť výsledkov. Ako sme to uviedli vyššie, dá sa to riešiť inputáciami nenulový hodnôt. Je tu však aj iný spôsob, ktorý vo väčšine prípadov rieši tento problém. Je to použiť spriemerované hodnoty zomrelých a žijúcich za viac kalendárnych rokov. V Slovenskej praxi sa používajú pri výpočte krajských UT trojročné priemery a pri výpočte okresných UT päťročné priemery. Na ilustráciu, ako postupovať, môžeme ukázať pri trojročných priemeroch:

r je rok, za ktorý budeme UT počítať

$\underline{D}_y^r$ je spriemerovaný počet zomrelých vo vekovej skupine y za rok r a počíta sa nasledovne:

$$\underline{D}_y^r = (D_y^{r-2} + D_y^{r-1} + D_y^r)/3, \text{ kde } D_y^{r-i} \text{ je počet zomrelých za rok } r-i.$$

$\underline{P}_y^r$ Spriemerovaný počet žijúcich vo vekovej skupine y za rok r a počíta sa nasledovne:

$$\underline{P}_y^r = (P_y^{r-2} + P_y^{r-1} + P_y^r)/3, \text{ kde } P_y^{r-i} \text{ je } \mathbf{priemerný stav} \text{ populácie za rok } r-i.$$

Výpočet $\underline{P}_y^r$ môžeme vykonať aj nasledovne:

$$\underline{P}_y^r = (P_y^{r-3} * 0,5 + P_y^{r-2} + P_y^{r-1} + P_y^r * 0,5)/3, \text{ kde } P_y^{r-i} \text{ je v tomto prípade } \mathbf{koncový stav} \text{ populácie za rok } r-i.$$

Takto upravené počtu zomrelých a žijúcich potom vstupujú do algoritmu skrátených UT.

Výpočet špeciálnych úmrtnostných tabuliek

Medzi špeciálne UT zaraďujeme **UT podľa príčin smrti**. Počítajú pomocou úmrtnostných tabuliek bez zisťovania príčin smrti. Môžu to byť úplné UT alebo aj skrátené UT za skúmanú populáciu. Z týchto tabuliek sa použijú hodnoty pravdepodobnosti dožitia $p_y = 1 - q_y$ pre všetky počítané veku, alebo vekové skupiny nasledovne:

D_y^i počet úmrtí na i-tú príčinu smrti vo veku y, pričom platí

$$D_y = \sum_{i=1}^r D_y^i$$

r je počet skúmaných príčin smrti

Urobia sa nasledovné transformácie, čím dostaneme nasledovné pravdepodobnosti úmrtia:

1. Pravdepodobnosť úmrtia iba pôsobením príčiny i vylúčením všetkých ostatných príčin smrti

$$q_y^i = 1 - p_y^{\frac{D_y^i}{D_y}}$$

2. Pravdepodobnosť úmrtia vylúčením pôsobenia i-tej príčiny

$$q_y^{-i} = 1 - p_y^{\frac{D_y - D_y^i}{D_y}}$$

3. Pravdepodobnosť úmrtia na príčinu i vylúčením pôsobenia príčiny j

$$q_y^{i-j} = \frac{D_y^i}{D_y - D_y^j} \left[1 - p_y^{\frac{D_y - D_y^j}{D_y}} \right]$$

4. pravdepodobnosť úmrtia na príčinu i vylúčením pôsobenia príčin j a k

$$q_y^{i-jk} = \frac{D_y^i}{D_y - D_y^j - D_y^k} \left[1 - p_y^{\frac{D_y - D_y^j - D_y^k}{D_y}} \right]$$

Na základe týchto pravdepodobností potom môžeme konštruovať štyri typy UT podľa príčin smrti pomocou nasledujúcich vzťahov:

$l_{y+1} = l_y \cdot (1 - q_y)$, kde q_y sa nahradí príslušnou pravdepodobnosťou podľa potreby skúmania príčin smrti,

$$d_y = l_y - l_{y+1}$$

$$L_y = (l_y + l_{y+1})/2$$

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_\omega$$

$$e_y = T_y / l_y$$

$$\text{pričom} \quad L_0 = I_0 - 0,9 \cdot d_0 \quad \text{a} \quad I_0 = 100000$$

Medzi špeciálne UT zaraďujeme **úmrtnostné tabuľky podľa rodinného stavu**. Zo súboru zomrelých sa vytriedia 4 skupiny osôb podľa deklarovaného rodinného stavu a veku. Vzniknú skupiny slobodných, vydatých/ženatých, rozvedených a ovdovelých. Podobne sa vytriedia tieto skupiny aj z priemerného stavu populácie. Spárené skupiny zomrelých a žijúcich podľa rovnakého rodinného stavu potom vstúpia do algoritmu výpočtu úplných UT, prípadne do algoritmu skrátených UT. Takto sa vytvoria 4 typy UT, z ktorých niektoré je potrebné upraviť na základe špecifických vlastností vstupov.

Bez zmeny zostáva UT slobodných. Počet slobodných zomrelých pokrýva celú vekovú škálu a nič nebráni výpočtom. Samozrejme niektoré veky môžu vykazovať za počítaný rok nulovú hodnotu zomrelých, ale to sa dá riešiť inputáciou, ako sme to popísali v časti o skrátených UT.

U ostatných UT podľa rodinného stavu nastáva problém, že osoby začínajú umierať až vo vyšších vekoch a neexistuje vzorka pre mladšie veky. Algoritmus výpočtu naráža na matematický problém delenie nulou, a tak táto časť tabuľky je nepoužiteľná a nedá sa publikovať. Prvý vek, ktorý sa dá akceptovať je pre rôzne rodinné stavy iný a mení sa z roka na rok. Dá sa zvoliť stratégia, že sa budú publikovať tabuľky od rôznych vekoch pre rôzne rodinné stavy, ale tu sa dá naráziť na problém na porovnateľnosť dĺžky života v jednotlivých vekoch. Jednoduchšia je stratégia, že sa zvolí fiktívny vek, ktorá sa objavuje pri každom rodinnom stave a očakáva sa aj v ďalších rokoch. Pri publikovaní UT podľa rodinného stavu pre SR je zvolený vek 30 rokov.

Ďalšie špeciálne UT sú **úmrtnostné tabuľky podľa vzdelania**. Podobne ako pri rodinnom stave, aj pre tieto tabuľky je potrebné vytriediť 4 skupiny osôb podľa deklarovaného vzdelania a veku. Do prvej skupiny sa vytriedia osoby bez vzdelania spolu s osobami so základným vzdelaním. Rozdeliť tieto skupiny by nebolo účelné, lebo by tvorili málo početné skupiny a bol by problém s výpočtom UT. Ďalšie skupiny budú tvoriť osoby so stredoškolským vzdelaním bez maturity, ďalej osoby so stredoškolským vzdelaním s maturitou a osoby s vysokoškolským vzdelaním. Takto vytvorené skupiny osôb potom môžu stúpiť do algoritmu výpočtu úplných UT, alebo aj do skrátených UT. Takto vypočítané UT sa upravujú, podobne ako UT podľa rodinného stavu, vzhľadom na to, že jednotlivé vzdelanostné skupiny začínajú pôsobiť v rôznych vekoch.

Bez zmeny zostáva UT pre skupinu bez vzdelania a so základným vzdelaním. Tieto osoby pokrývajú celú vekovú škálu a nie je prekážka na výpočet UT. U ostatných vzdelanostných skupinách je potrebné časť tabuliek vynechať. V tomto prípade je situácia jednoduchšia ako v prípade rodinného stavu, lebo sa dá predpokladať vek od ktorého sa už dané vzdelanie pôsobí intenzívne a z roku na rok sa to nemení. Pre stredoškolské vzdelania sa dá zvoliť vek 20 rokov a pre vysokoškolsky vzdelaných vek 25 rokov. Takže UT pre stredoškolsky vzdelaných sa publikuje od veku 20 rokov a pre vysokoškolsky vzdelaných od 25 rokov.

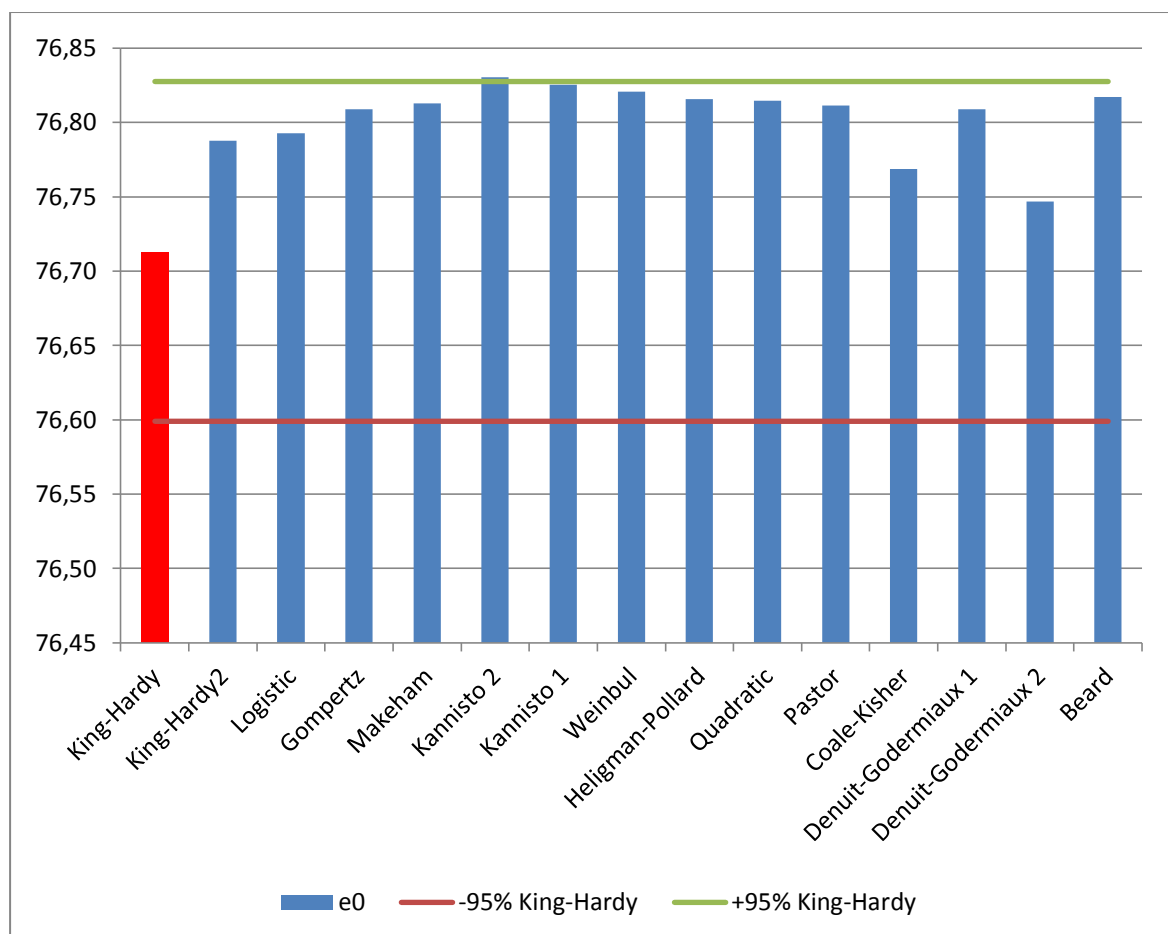
Medzi špeciálne UT zaraďujeme aj **úmrtnostné tabuľky podľa národnosti**. Teoreticky nič nebráni tomu, aby sa dali potrebné dáta vytriediť, či už počty zomrelých alebo počty žijúcich a vytvoriť úplné alebo skrátené UT. Jediný problém je početnosť jednotlivých národností. Ako už bolo spomenuté UT sa nepočítajú pre populácie menšej početnosti ako 5000 osôb. Toto kritérium spĺňa iba niekoľko národností, takže sa UT dajú počítať iba pre tieto. Veľký problém je aj veľký počet osôb (6-7%)

u ktorých nevieme určiť národnosť. Tieto osoby môžu výrazne ovplyvniť výsledok a môžu dávať nevysvetliteľné výsledky. Z týchto dôvodov počítať takéto UT sa neodporúča.

Analytické zhodnotenie a testovanie rozdielov - analýza praktického využitia nových metód graduácie v podmienkach Slovenska

Vzhľadom na to, že neexistuje metóda (okrem teoretických úvah), ktorá by jednoznačne určila najlepší model na odhad pravdepodobnosti úmrtia, použijeme ich všetky na výpočet UT. Pokúsime sa ich hodnotiť na základe porovnania strednej dĺžky života pri narodení pre jednotlivé modely voči strednej dĺžky života pri narodení vypočítanú metódou „King-Hardy“, ktorá sa používa v slovenskej praxi.

Graf 7.: Stredná dĺžka života pri narodení vypočítaných podľa vybraných modelov, Slovensko 2014



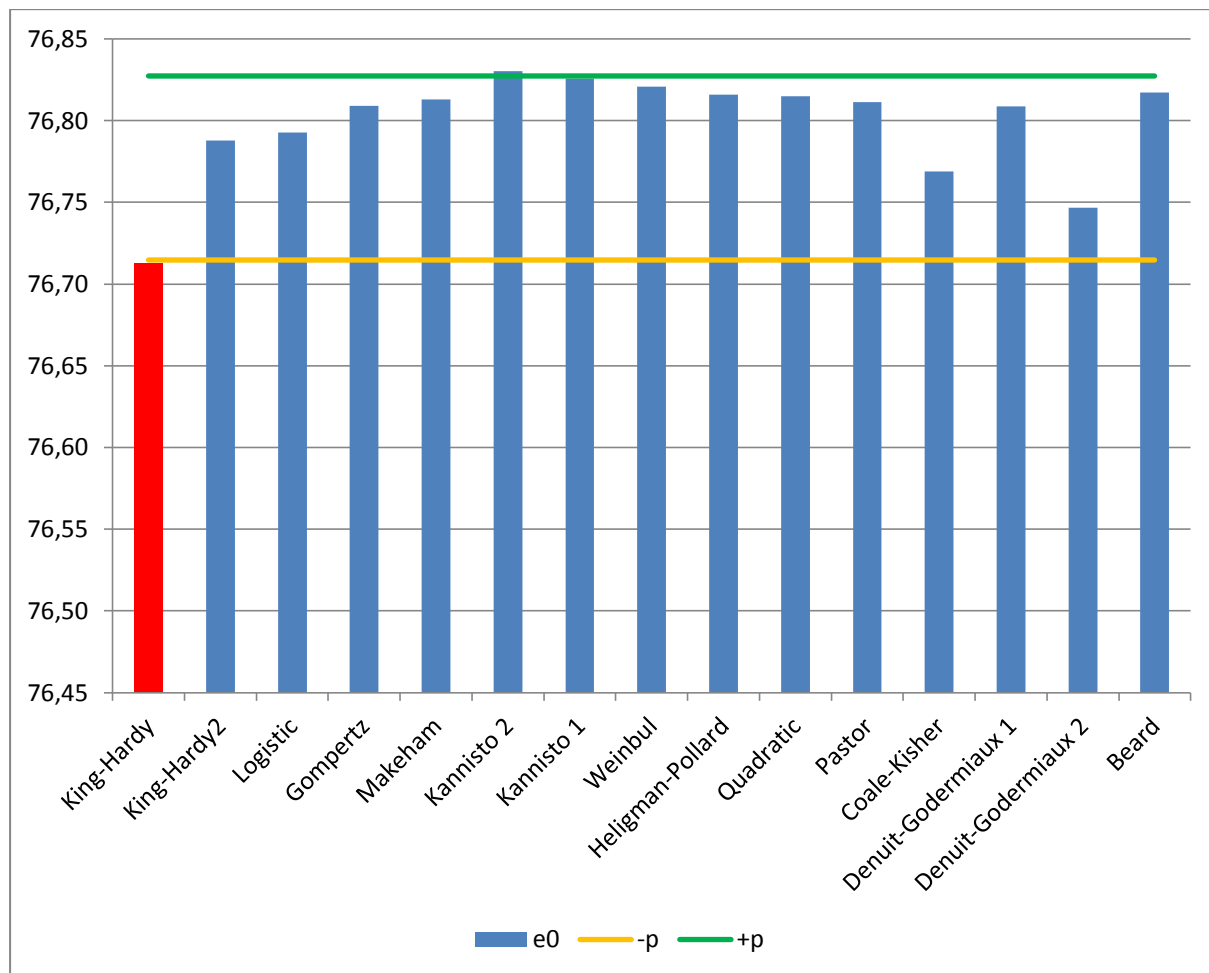
Na grafe 7 sme vyznačili červenou farbou strednú dĺžku života pri narodení vypočítanú metódou „King-Hardy“, ktorá má hodnotu 76,71 roka. Farebnými vodorovnými čiarami je vyznačený 95 % interval spoľahlivosti k tejto hodnote. Prakticky to znamená, že štatisticky správna hodnota strednej dĺžky života pri narodení vypočítanú metódou „King-Hardy“ s pravdepodobnosťou 95 % by mala byť medzi hodnotami 76,60 a 76,83. Na základe tohto kritéria môžeme hodnotiť všetky modely za prijateľné. Kriticky môžeme pozerať na model „Kannisto 2“, ktorý dáva výsledok mierne za hornú hranicu takto zvoleného intervalu spoľahlivosti.

Ďalšie kritérium na hodnotenie môžeme zvoliť nasledovne. Vypočítame 95 % interval spoľahlivosti pre všetky modely zvlášť. Následne vypočítame prienik týchto intervalov. Taký interval je v našom

prípade 76,71 až 76,83. Do tohto intervalu by mali padnú štatisticky správne hodnoty zo všetkých modelov.

Na základe tohto kritéria môžeme znova všetky modely vyhodnotiť ako prijateľné, okrem modelu „King-Hardy“, ktorý dáva mierne nižšiu hodnotu strednej dĺžky života pri narodení ako spodná hranica intervalu a modelu „Kannisto 2“, ktorá dáva mierne vyššiu hodnotu ukazovateľa.

Graf 8.: Stredná dĺžka života pri narodení vypočítaných podľa vybraných modelov, Slovensko 2014



Ďalšie kritérium na výber najlepšieho modelu môže byť vypočítaná veľkosť strednej dĺžky života pri narodení (e_0). Modely s najvyššími hodnotami môžeme označiť, ako v [2], za optimistickými modelmi a najnižšími hodnotami za pesimistickými. Jednoznačne je model „King-Hardy“ najpesimistickejší. Na druhej strane najoptimistickejší model je „Kannisto 2“.

Dôležité pri výbere modelu je aj spôsob výpočtu parametrov. Parametre modelov „King-Hardy“, „King-Hardy 2“ a „Coale-Kisher“ sa počítajú veľmi jednoducho v tabuľke Excelu a nevyžadujú zložité štatistické systémy a dajú sa ľahko aplikovať pri rutinných, pravidelných výpočtoch. Parametre ostatných modelov sa počítajú komplikovanejšie a vyžadujú znalosť a použitie zložitých štatistických postupov, softvérových systémov. Sú to metódy odhadov nelineárnych regresných modelov. Týchto metód je veľa, ale tu treba poznamenať aj to, že nie všetky metódy dávajú štatisticky vyhovujúce riešenie a tak je potrebné vyberať to najvyhovujúcejšie. My máme k dispozícii systém SAS/STAT® 14.1 kde pomocou procedúry NLIN je možné takéto odhady vykonať. Zahrňuje v sebe viac metód na

odhad nelineárnych regresných modelov. My sme vybrali iteratívnu nelineárnu metódu najmenších štvorcov Marquadt, okrem modelu „Weinbul“, kde sme použili Newtonovú metódu a modelu „Pastor“, kde sme použili modifikovanú Gauss-Newtonovu metódu. (podrobný popis nájdete na: <http://support.sas.com/documentation/onlinedoc/stat/141/nlin.pdf>)

Na záver, ak zhrnieme vyhodnotenie kritérií výberu najvhodnejšieho modelu, môžeme konštatovať, že doposiaľ použitá metóda „King-Hardy“ dáva výsledky, hoci na hranici štatistickej správnosti, akceptovateľné, ale veľmi pesimistické. Bolo by dobré sa prikloniť optimistickjším modelov. Z nášho výberu sa ponúka model „Coale-Kisher“, ktorý dáva optimistickjšie výsledky (nie najoptimistickjšie) a nie je problém s odhadom parametrov modelu, čo je výhoda pri automatizácii výpočtu UT. Možno uvažovať aj s použitím modelu „King-Hardy 2“, ktorý má podobné vlastnosti.

Návrh spracovania UT v ďalších rokoch

Ako v predchádzajúcej časti sme ukázali, nie je možné jednoznačne určiť, ktorá metóda dáva presnejšie výsledky. Z toho dôvodu navrhujeme nasledovné postupy pri výpočte úplných UT pre SR:

- Nemeniť metodiku výpočtu úplných UT za SR, naďalej ich považovať za **oficiálne UT**. Zabezpečíme tým porovnateľnosť vypočítaných hodnôt z minulosťou. Teraz máme k dispozícii časový rad od roku 1950. Pri nových metódach by bolo potrebné prepočítať všetky UT do minulosti. Čo by bolo časovo dosť náročné.
- Od nasledujúceho roku počítať úplné UT za SR aj s ostatnými metódami, popísanými v tomto materiály. Môžu sa použiť pre analytické účely iných vedných disciplín, ako poisťovníctvo, alebo sociálne vedy. Tieto UT by sa publikovali ako **neoficiálne UT**.
- Zaviesť výpočet **generačných UT**, na základe ktorých by sa dali ohodnotiť jednotlivé metódy výpočtu UT. V prvom kroku by bolo potrebné vytvoriť databázu generačných údajov minimálne za sto rokov nazad. Ak je to možné vytvoriť, treba spísať metodiku výpočtov. Potom by sa dalo pristúpiť k postupnému výpočtu UT pre ukončené generácie.
- Ostatné UT (rodinné stavy, vzdelanie, regióny,...) počítať naďalej rovnako ako doteraz.

Príloha

Tabuľka 1. Pravdepodobnosti úmrtia počítané so vzorcami (1) a (2), Slovensko 2014.

	D _x	P _x	(1)	(2)	(1)-(2)						
0	318	55344	0,005729	0,005729	0,000000	66	992	56648	0,017360	0,017359	0,000000
1	24	56068	0,000428	0,000428	0,000000	67	1026	50686	0,020040	0,020039	0,000001
2	19	58909	0,000322	0,000322	0,000000	68	917	44411	0,020437	0,020436	0,000001
3	6	59695	0,000101	0,000101	0,000000	69	989	42825	0,022830	0,022829	0,000001
4	13	58949	0,000221	0,000221	0,000000	70	1089	41384	0,025973	0,025971	0,000001
5	13	58488	0,000222	0,000222	0,000000	71	1008	38957	0,025544	0,025543	0,000001
6	3	55784	0,000054	0,000054	0,000000	72	1125	37808	0,029320	0,029318	0,000002
7	2	54209	0,000037	0,000037	0,000000	73	1045	36436	0,028275	0,028273	0,000002
8	9	54232	0,000166	0,000166	0,000000	74	1276	33946	0,036896	0,036891	0,000004
9	7	54263	0,000129	0,000129	0,000000	75	1206	30965	0,038203	0,038199	0,000005
10	3	52836	0,000057	0,000057	0,000000	76	1278	28610	0,043694	0,043687	0,000007
11	5	51268	0,000098	0,000098	0,000000	77	1301	26714	0,047544	0,047535	0,000009
12	5	51212	0,000098	0,000098	0,000000	78	1371	25486	0,052386	0,052374	0,000012
13	5	53295	0,000094	0,000094	0,000000	79	1477	24149	0,059347	0,059329	0,000018
14	15	55503	0,000270	0,000270	0,000000	80	1598	22509	0,068562	0,068534	0,000028
15	12	56393	0,000213	0,000213	0,000000	81	1626	21490	0,072905	0,072871	0,000033
16	20	57699	0,000347	0,000347	0,000000	82	1721	19946	0,082717	0,082667	0,000049
17	26	59127	0,000440	0,000440	0,000000	83	1776	17895	0,094554	0,094480	0,000074
18	28	60337	0,000464	0,000464	0,000000	84	1683	15697	0,101766	0,101673	0,000092
19	25	63394	0,000394	0,000394	0,000000	85	1571	13518	0,109833	0,109717	0,000117
20	32	69072	0,000463	0,000463	0,000000	86	1545	11468	0,126225	0,126047	0,000179
21	29	72948	0,000397	0,000397	0,000000	87	1497	9725	0,142932	0,142671	0,000261
22	40	75294	0,000531	0,000531	0,000000	88	1334	7985	0,154193	0,153863	0,000330
23	38	77759	0,000489	0,000489	0,000000	89	1191	6633	0,164764	0,164359	0,000405
24	43	78473	0,000548	0,000548	0,000000	90	1154	5523	0,189196	0,188575	0,000621
25	37	79707	0,000464	0,000464	0,000000	91	979	4393	0,200533	0,199789	0,000744
26	47	81346	0,000578	0,000578	0,000000	92	822	3351	0,218501	0,217530	0,000971
27	44	82896	0,000531	0,000531	0,000000	93	542	2270	0,213302	0,212401	0,000901
28	40	85583	0,000467	0,000467	0,000000	94	480	1521	0,272572	0,270636	0,001937
29	56	87104	0,000643	0,000643	0,000000	95	167	858	0,177377	0,176868	0,000509
30	66	87302	0,000756	0,000756	0,000000	96	112	448	0,222443	0,221417	0,001026
31	61	87628	0,000696	0,000696	0,000000	97	81	344	0,210663	0,209797	0,000866
32	55	87873	0,000626	0,000626	0,000000	98	51	294	0,159875	0,159506	0,000369
33	76	88491	0,000858	0,000858	0,000000	99	57	244	0,209174	0,208327	0,000848
34	87	91167	0,000954	0,000954	0,000000	100	53	185	0,250591	0,249103	0,001488
35	73	92991	0,000785	0,000785	0,000000	101	27	156	0,159292	0,158927	0,000365
36	108	92396	0,001168	0,001168	0,000000	102	16	118	0,127490	0,127306	0,000184
37	120	91987	0,001304	0,001304	0,000000	103	6	63	0,091603	0,091536	0,000067
38	122	90813	0,001343	0,001343	0,000000	104	7	21	0,285714	0,283469	0,002246
39	138	89774	0,001536	0,001536	0,000000	105	6	44	0,127660	0,127475	0,000185
40	115	87358	0,001316	0,001316	0,000000						
41	145	82539	0,001755	0,001755	0,000000						
42	158	77788	0,002029	0,002029	0,000000						
43	136	74378	0,001827	0,001827	0,000000						
44	184	72598	0,002531	0,002531	0,000000						
45	187	70230	0,002659	0,002659	0,000000						
46	229	68766	0,003325	0,003325	0,000000						
47	232	70269	0,003296	0,003296	0,000000						
48	264	72558	0,003632	0,003632	0,000000						
49	283	74876	0,003772	0,003772	0,000000						
50	368	75556	0,004859	0,004859	0,000000						
51	345	73434	0,004687	0,004687	0,000000						
52	396	73048	0,005406	0,005406	0,000000						
53	404	74062	0,005440	0,005440	0,000000						
54	500	73333	0,006795	0,006795	0,000000						
55	564	74155	0,007577	0,007577	0,000000						
56	636	76478	0,008282	0,008282	0,000000						
57	760	77944	0,009703	0,009703	0,000000						
58	733	78039	0,009349	0,009349	0,000000						
59	804	76450	0,010462	0,010462	0,000000						
60	876	74484	0,011692	0,011692	0,000000						
61	946	73381	0,012809	0,012809	0,000000						
62	1032	72047	0,014222	0,014222	0,000000						
63	995	68812	0,014356	0,014356	0,000000						
64	995	63464	0,015556	0,015556	0,000000						
65	987	59292	0,016509	0,016509	0,000000						

Tabuľka 2. Základná úplná UT, Slovensko 2014.

	D _x	P _x	(2)	I _x	d _x	L _x	T _x	e _x										
0	318	55344	0,005729	100000	573	99484	7692179	76,92	68	917	44411	0,020436	78069	1595	77271	1183386	15,16	
1	24	56068	0,000428	99427	43	99406	7592695	76,36	69	989	42825	0,022829	76473	1746	75600	1106115	14,46	
2	19	58909	0,000322	99385	32	99368	7493289	75,40	70	1089	41384	0,025971	74727	1941	73757	1030515	13,79	
3	6	59695	0,000101	99352	10	99347	7393921	74,42	71	1008	38957	0,025543	72787	1859	71857	956758	13,14	
4	13	58949	0,000221	99342	22	99332	7294573	73,43	72	1125	37808	0,029318	70927	2079	69888	884901	12,48	
5	13	58488	0,000222	99321	22	99310	7195242	72,44	73	1045	36436	0,028273	68848	1947	67875	815013	11,84	
6	3	55784	0,000054	99298	5	99296	7095932	71,46	74	1276	33946	0,036891	66901	2468	65667	747138	11,17	
7	2	54209	0,000037	99293	4	99291	6996636	70,46	75	1206	30965	0,038199	64433	2461	63203	681471	10,58	
8	9	54232	0,000166	99289	16	99281	6897345	69,47	76	1278	28610	0,043687	61972	2707	60618	618268	9,98	
9	7	54263	0,000129	99273	13	99267	6798064	68,48	77	1301	26714	0,047535	59265	2817	57856	557650	9,41	
10	3	52836	0,000057	99260	6	99257	6698797	67,49	78	1371	25486	0,052374	56448	2956	54969	499793	8,85	
11	5	51268	0,000098	99255	10	99250	6599540	66,49	79	1477	24149	0,059329	53491	3174	51904	444824	8,32	
12	5	51212	0,000098	99245	10	99240	6500290	65,50	80	1598	22509	0,068534	50318	3448	48593	392920	7,81	
13	5	53295	0,000094	99235	9	99231	6401050	64,50	81	1626	21490	0,072871	46869	3415	45161	344326	7,35	
14	15	55503	0,000270	99226	27	99212	6301820	63,51	82	1721	19946	0,082667	43454	3592	41658	299165	6,88	
15	12	56393	0,000213	99199	21	99189	6202607	62,53	83	1776	17895	0,094480	39862	3766	37978	257507	6,46	
16	20	57699	0,000347	99178	34	99161	6103418	61,54	84	1683	15697	0,101673	36095	3670	34260	219529	6,08	
17	26	59127	0,000440	99144	44	99122	6004258	60,56	85	1571	13518	0,109717	32426	3558	30647	185268	5,71	
18	28	60337	0,000464	99100	46	99077	5905136	59,59	86	1545	11468	0,126047	28868	3639	27049	154621	5,36	
19	25	63394	0,000394	99054	39	99035	5806059	58,62	87	1497	9725	0,142671	25229	3599	23429	127573	5,06	
20	32	69072	0,000463	99015	46	98992	5707024	57,64	88	1334	7985	0,153863	21630	3328	19966	104143	4,81	
21	29	72948	0,000397	98969	39	98949	5608032	56,66	89	1191	6633	0,164359	18302	3008	16798	84178	4,60	
22	40	75294	0,000531	98930	53	98904	5509083	55,69	90	1154	5523	0,188575	15294	2884	13852	67380	4,41	
23	38	77759	0,000489	98877	48	98853	5410179	54,72	91	979	4393	0,199789	12410	2479	11170	53528	4,31	
24	43	78473	0,000548	98829	54	98802	5311326	53,74	92	822	3351	0,217530	9930	2160	8850	42358	4,27	
25	37	79707	0,000464	98775	46	98752	5212524	52,77	93	542	2270	0,212401	7770	1650	6945	33508	4,31	
26	47	81346	0,000578	98729	57	98700	5113773	51,80	94	480	1521	0,270636	6120	1656	5292	26563	4,34	
27	44	82896	0,000531	98672	52	98646	5015072	50,83	95	167	858	0,176868	4464	789	4069	21271	4,77	
28	40	85583	0,000467	98620	46	98597	4916426	49,85	96	112	448	0,221417	3674	814	3267	17203	4,68	
29	56	87104	0,000643	98573	63	98542	4817830	48,88	97	81	344	0,209797	2861	600	2561	13935	4,87	
30	66	87302	0,000756	98510	74	98473	4719288	47,91	98	51	294	0,159506	2260	361	2080	11375	5,03	
31	61	87628	0,000696	98436	69	98401	4620815	46,94	99	57	244	0,208327	1900	396	1702	9295	4,89	
32	55	87873	0,000626	98367	62	98336	4522414	45,97	100	53	185	0,249103	1504	375	1317	7593	5,05	
33	76	88491	0,000858	98306	84	98263	4424077	45,00	101	27	156	0,158927	1129	179	1040	6276	5,56	
34	87	91167	0,000954	98221	94	98174	4325814	44,04	102	16	118	0,127306	950	121	889	5236	5,51	
35	73	92991	0,000785	98128	77	98089	4227639	43,08	103	6	63	0,091536	829	76	791	4347	5,24	
36	108	92396	0,001168	98051	115	97993	4129550	42,12	104	7	21	0,283469	753	213	646	3556	4,72	
37	120	91987	0,001304	97936	128	97872	4031557	41,17	105	5	12	0,340759	540	184	448	2909	5,39	
38	122	90813	0,001343	97808	131	97743	3933685	40,22	106	0	9	0,000000	356	0	356	2462	6,92	
39	138	89774	0,001536	97677	150	97602	3835942	39,27	107	1	6	0,166247	356	59	326	2106	5,92	
40	115	87358	0,001316	97527	128	97463	3738340	38,33	108	0	5	0,000000	297	0	297	1780	6,00	
41	145	82539	0,001755	97399	171	97313	3640877	37,38	109	0	5	0,000000	297	0	297	1483	5,00	
42	158	77788	0,002029	97228	197	97129	3543564	36,45	110	0	4	0,000000	297	0	297	1186	4,00	
43	136	74378	0,001827	97030	177	96942	3446435	35,52	111	0	3	0,000000	297	0	297	890	3,00	
44	184	72598	0,002531	96853	245	96731	3349493	34,58	112	0	1	0,000000	297	0	297	593	2,00	
45	187	70230	0,002659	96608	257	96480	3252763	33,67	113	0	1	0,000000	297	0	297	297	0,50	
46	229	68766	0,003325	96351	320	96191	3156283	32,76	114+	0	0	1,000000	297	297	0	0	0,00	
47	232	70269	0,003296	96031	317	95873	3060092	31,87										
48	264	72558	0,003632	95714	348	95540	2964220	30,97										
49	283	74876	0,003772	95367	360	95187	2868679	30,08										
50	368	75556	0,004859	95007	462	94776	2773492	29,19										
51	345	73434	0,004687	94545	443	94324	2678716	28,33										
52	396	73048	0,005406	94102	509	93848	2584393	27,46										
53	404	74062	0,005440	93593	509	93339	2490545	26,61										
54	500	73333	0,006795	93084	633	92768	2397206	25,75										
55	564	74155	0,007577	92452	700	92101	2304438	24,93										
56	636	76478	0,008282	91751	760	91371	2212337	24,11										
57	760	77944	0,009703	90991	883	90550	2120965	23,31										
58	733	78039	0,009349	90108	842	89687	2030415	22,53										
59	804	76450	0,010462	89266	934	88799	1940728	21,74										
60	876	74484	0,011692	88332	1033	87816	1851929	20,97										
61	946	73381	0,012809	87299	1118	86740	1764113	20,21										
62	1032	72047	0,014222	86181	1226	85568	1677373	19,46										
63	995	68812	0,014356	84955	1220	84346	1591805	18,74										
64	995	63464	0,015556	83736	1303	83085	1507459	18,00										
65	987	59292	0,016509	82433	1361	81753	1424374	17,28										
66	992</																	

Tabuľka 3. Modifikovaná základná úplná UT metódou (3), Slovensko 2014.

	Dx	Px	(2)	lx	dx	Lx	Tx	ex									
0	318	55344	0,005729	100000	573	99484	7685957	76,86	68	917	44411	0,020436	78069	1595	77271	1177164	15,08
1	24	56068	0,000428	99427	43	99406	7586473	76,30	69	989	42825	0,022829	76473	1746	75600	1099893	14,38
2	19	58909	0,000322	99385	32	99368	7487067	75,33	70	1089	41384	0,025971	74727	1941	73757	1024292	13,71
3	6	59695	0,000101	99352	10	99347	7387698	74,36	71	1008	38957	0,025543	72787	1859	71857	950535	13,06
4	13	58949	0,000221	99342	22	99332	7288351	73,37	72	1125	37808	0,029318	70927	2079	69888	878678	12,39
5	13	58488	0,000222	99321	22	99310	7189019	72,38	73	1045	36436	0,028273	68848	1947	67875	808791	11,75
6	3	55784	0,000054	99298	5	99296	7089710	71,40	74	1276	33946	0,036891	66901	2468	65667	740916	11,07
7	2	54209	0,000037	99293	4	99291	6990414	70,40	75	1206	30965	0,038199	64433	2461	63203	675248	10,48
8	9	54232	0,000166	99289	16	99281	6891123	69,40	76	1278	28610	0,043687	61972	2707	60618	612046	9,88
9	7	54263	0,000129	99273	13	99267	6791841	68,42	77	1301	26714	0,047535	59265	2817	57856	551427	9,30
10	3	52836	0,000057	99260	6	99257	6692575	67,42	78	1371	25486	0,052374	56448	2956	54969	493571	8,74
11	5	51268	0,000098	99255	10	99250	6593317	66,43	79	1477	24149	0,059329	53491	3174	51904	438602	8,20
12	5	51212	0,000098	99245	10	99240	6494068	65,43	80	1598	22509	0,068534	50318	3448	48593	386697	7,69
13	5	53295	0,000094	99235	9	99231	6394828	64,44	81	1626	21490	0,072871	46869	3415	45161	338104	7,21
14	15	55503	0,000270	99226	27	99212	6295597	63,45	82	1721	19946	0,082667	43454	3592	41658	292942	6,74
15	12	56393	0,000213	99199	21	99189	6196385	62,46	83	1776	17895	0,094480	39862	3766	37978	251285	6,30
16	20	57699	0,000347	99178	34	99161	6097196	61,48	84	1683	15697	0,101673	36095	3670	34260	213306	5,91
17	26	59127	0,000440	99144	44	99122	5998035	60,50	85	1571	13518	0,109717	32426	3558	30647	179046	5,52
18	28	60337	0,000464	99100	46	99077	5898913	59,52	86	1545	11468	0,126047	28868	3639	27049	148399	5,14
19	25	63394	0,000394	99054	39	99035	5799836	58,55	87	1497	9725	0,142671	25229	3599	23429	121350	4,81
20	32	69072	0,000463	99015	46	98992	5700802	57,58	88	1334	7985	0,153863	21630	3328	19966	97921	4,53
21	29	72948	0,000397	98969	39	98949	5601810	56,60	89	1191	6633	0,164359	18302	3008	16798	77955	4,26
22	40	75294	0,000531	98930	53	98904	5502860	55,62	90	1154	5523	0,188575	15294	2884	13852	61158	4,00
23	38	77759	0,000489	98877	48	98853	5403957	54,65	91	979	4393	0,199789	12410	2479	11170	47306	3,81
24	43	78473	0,000548	98829	54	98802	5305104	53,68	92	822	3351	0,217530	9930	2160	8850	36136	3,64
25	37	79707	0,000464	98775	46	98752	5206302	52,71	93	542	2270	0,212401	7770	1650	6945	27286	3,51
26	47	81346	0,000578	98729	57	98700	5107550	51,73	94	480	1521	0,270636	6120	1656	5292	20341	3,32
27	44	82896	0,000531	98672	52	98646	5008850	50,76	95	167	858	0,176868	4464	789	4069	15049	3,37
28	40	85583	0,000467	98620	46	98597	4910204	49,79	96	112	448	0,221417	3674	814	3267	10980	2,99
29	56	87104	0,000643	98573	63	98542	4811607	48,81	97	81	344	0,209797	2861	600	2561	7713	2,70
30	66	87302	0,000756	98510	74	98473	4713066	47,84	98	51	294	0,159506	2260	361	2080	5152	2,28
31	61	87628	0,000696	98436	69	98401	4614593	46,88	99	57	244	0,208327	1900	396	1702	3072	1,62
32	55	87873	0,000626	98367	62	98336	4516191	45,91	100	115	586	0,178190	1504	1504	1370	1370	0,91
33	76	88491	0,000858	98306	84	98263	4417855	44,94									
34	87	91167	0,000954	98221	94	98174	4319591	43,98									
35	73	92991	0,000785	98128	77	98089	4221417	43,02									
36	108	92396	0,001168	98051	115	97993	4123328	42,05									
37	120	91987	0,001304	97936	128	97872	4025335	41,10									
38	122	90813	0,001343	97808	131	97743	3927462	40,15									
39	138	89774	0,001536	97677	150	97602	3829720	39,21									
40	115	87358	0,001316	97527	128	97463	3732118	38,27									
41	145	82539	0,001755	97399	171	97313	3634655	37,32									
42	158	77788	0,002029	97228	197	97129	3537342	36,38									
43	136	74378	0,001827	97030	177	96942	3440213	35,45									
44	184	72598	0,002531	96853	245	96731	3343271	34,52									
45	187	70230	0,002659	96608	257	96480	3246540	33,61									
46	229	68766	0,003325	96351	320	96191	3150061	32,69									
47	232	70269	0,003296	96031	317	95873	3053870	31,80									
48	264	72558	0,003632	95714	348	95540	2957997	30,90									
49	283	74876	0,003772	95367	360	95187	2862457	30,02									
50	368	75556	0,004859	95007	462	94776	2767270	29,13									
51	345	73434	0,004687	94545	443	94324	2672494	28,27									
52	396	73048	0,005406	94102	509	93848	2578170	27,40									
53	404	74062	0,005440	93593	509	93339	2484322	26,54									
54	500	73333	0,006795	93084	633	92768	2390984	25,69									
55	564	74155	0,007577	92452	700	92101	2298216	24,86									
56	636	76478	0,008282	91751	760	91371	2206114	24,04									
57	760	77944	0,009703	90991	883	90550	2114743	23,24									
58	733	78039	0,009349	90108	842	89687	2024193	22,46									
59	804	76450	0,010462	89266	934	88799	1934506	21,67									
60	876	74484	0,011692	88332	1033	87816	1845707	20,90									
61	946	73381	0,012809	87299	1118	86740	1757891	20,14									
62	1032	72047	0,014222	86181	1226	85568	1671151	19,39									
63	995	68812	0,014356	84955	1220	84346	1585582	18,66									
64	995	63464	0,015556	83736	1303	83085	1501237	17,93									
65	987	59292	0,016509	82433	1361	81753	1418152	17,20									
66	992	56648	0,017359	81072	1407	80369	1336399	16,48									
67	1026	50686	0,020039	79665	1596	78867	1256030	15,77									

Tabuľka 4. Modifikovaná základná úplná UT metódou (4), Slovensko 2014.

Dx	Px	(2)	lx	dx	Lx	Tx	ex										
0	318	55344	0,005729	100000	573	99484	7692251	76,92	68	917	44411	0,020436	78069	1595	77271	1183458	15,16
1	24	56068	0,000428	99427	43	99406	7592767	76,37	69	989	42825	0,022829	76473	1746	75600	1106187	14,47
2	19	58909	0,000322	99385	32	99368	7493361	75,40	70	1089	41384	0,025971	74727	1941	73757	1030587	13,79
3	6	59695	0,000101	99352	10	99347	7393993	74,42	71	1008	38957	0,025543	72787	1859	71857	956830	13,15
4	13	58949	0,000221	99342	22	99332	7294645	73,43	72	1125	37808	0,029318	70927	2079	69888	884973	12,48
5	13	58488	0,000222	99321	22	99310	7195314	72,45	73	1045	36436	0,028273	68848	1947	67875	815085	11,84
6	3	55784	0,000054	99298	5	99296	7096004	71,46	74	1276	33946	0,036891	66901	2468	65667	747210	11,17
7	2	54209	0,000037	99293	4	99291	6996708	70,47	75	1206	30965	0,038199	64433	2461	63203	681543	10,58
8	9	54232	0,000166	99289	16	99281	6897417	69,47	76	1278	28610	0,043687	61972	2707	60618	618340	9,98
9	7	54263	0,000129	99273	13	99267	6798136	68,48	77	1301	26714	0,047535	59265	2817	57856	557721	9,41
10	3	52836	0,000057	99260	6	99257	6698869	67,49	78	1371	25486	0,052374	56448	2956	54969	499865	8,86
11	5	51268	0,000098	99255	10	99250	6599612	66,49	79	1477	24149	0,059329	53491	3174	51904	444896	8,32
12	5	51212	0,000098	99245	10	99240	6500362	65,50	80	1598	22509	0,068534	50318	3448	48593	392991	7,81
13	5	53295	0,000094	99235	9	99231	6401122	64,50	81	1626	21490	0,072871	46869	3415	45161	344398	7,35
14	15	55503	0,000270	99226	27	99212	6301891	63,51	82	1721	19946	0,082667	43454	3592	41658	299236	6,89
15	12	56393	0,000213	99199	21	99189	6202679	62,53	83	1776	17895	0,094480	39862	3766	37978	257579	6,46
16	20	57699	0,000347	99178	34	99161	6103490	61,54	84	1683	15697	0,101673	36095	3670	34260	219600	6,08
17	26	59127	0,000440	99144	44	99122	6004330	60,56	85	1571	13518	0,109717	32426	3558	30647	185340	5,72
18	28	60337	0,000464	99100	46	99077	5905208	59,59	86	1545	11468	0,126047	28868	3639	27049	154693	5,36
19	25	63394	0,000394	99054	39	99035	5806131	58,62	87	1497	9725	0,142671	25229	3599	23429	127645	5,06
20	32	69072	0,000463	99015	46	98992	5707096	57,64	88	1334	7985	0,153863	21630	3328	19966	104215	4,82
21	29	72948	0,000397	98969	39	98949	5608104	56,67	89	1191	6633	0,164359	18302	3008	16798	84249	4,60
22	40	75294	0,000531	98930	53	98904	5509155	55,69	90	1154	5523	0,188575	15294	2884	13852	67452	4,41
23	38	77759	0,000489	98877	48	98853	5410251	54,72	91	979	4393	0,199789	12410	2479	11170	53600	4,32
24	43	78473	0,000548	98829	54	98802	5311398	53,74	92	822	3351	0,217530	9930	2160	8850	42430	4,27
25	37	79707	0,000464	98775	46	98752	5212596	52,77	93	542	2270	0,212401	7770	1650	6945	33580	4,32
26	47	81346	0,000578	98729	57	98700	5113844	51,80	94	480	1521	0,270636	6120	1656	5292	26635	4,35
27	44	82896	0,000531	98672	52	98646	5015144	50,83	95	167	858	0,176868	4464	789	4069	21343	4,78
28	40	85583	0,000467	98620	46	98597	4916498	49,85	96	112	448	0,221417	3674	814	3267	17274	4,70
29	56	87104	0,000643	98573	63	98542	4817902	48,88	97	81	344	0,209797	2861	600	2561	14007	4,90
30	66	87302	0,000756	98510	74	98473	4719360	47,91	98	51	294	0,159506	2260	361	2080	11447	5,06
31	61	87628	0,000696	98436	69	98401	4620887	46,94	99	57	244	0,208327	1900	396	1702	9366	4,93
32	55	87873	0,000626	98367	62	98336	4522485	45,98	100	115	586	0,178190	1504	1504	7664	7664	5,10
33	76	88491	0,000858	98306	84	98263	4424149	45,00									
34	87	91167	0,000954	98221	94	98174	4325886	44,04									
35	73	92991	0,000785	98128	77	98089	4227711	43,08									
36	108	92396	0,001168	98051	115	97993	4129622	42,12									
37	120	91987	0,001304	97936	128	97872	4031629	41,17									
38	122	90813	0,001343	97808	131	97743	3933757	40,22									
39	138	89774	0,001536	97677	150	97602	3836014	39,27									
40	115	87358	0,001316	97527	128	97463	3738412	38,33									
41	145	82539	0,001755	97399	171	97313	3640949	37,38									
42	158	77788	0,002029	97228	197	97129	3543636	36,45									
43	136	74378	0,001827	97030	177	96942	3446507	35,52									
44	184	72598	0,002531	96853	245	96731	3349565	34,58									
45	187	70230	0,002659	96608	257	96480	3252834	33,67									
46	229	68766	0,003325	96351	320	96191	3156355	32,76									
47	232	70269	0,003296	96031	317	95873	3060164	31,87									
48	264	72558	0,003632	95714	348	95540	2964291	30,97									
49	283	74876	0,003772	95367	360	95187	2868751	30,08									
50	368	75556	0,004859	95007	462	94776	2773564	29,19									
51	345	73434	0,004687	94545	443	94324	2678788	28,33									
52	396	73048	0,005406	94102	509	93848	2584464	27,46									
53	404	74062	0,005440	93593	509	93339	2490617	26,61									
54	500	73333	0,006795	93084	633	92768	2397278	25,75									
55	564	74155	0,007577	92452	700	92101	2304510	24,93									
56	636	76478	0,008282	91751	760	91371	2212408	24,11									
57	760	77944	0,009703	90991	883	90550	2121037	23,31									
58	733	78039	0,009349	90108	842	89687	2030487	22,53									
59	804	76450	0,010462	89266	934	88799	1940800	21,74									
60	876	74484	0,011692	88332	1033	87816	1852001	20,97									
61	946	73381	0,012809	87299	1118	86740	1764185	20,21									
62	1032	72047	0,014222	86181	1226	85568	1677445	19,46									
63	995	68812	0,014356	84955	1220	84346	1591877	18,74									
64	995	63464	0,015556	83736	1303	83085	1507531	18,00									
65	987	59292	0,016509	82433	1361	81753	1424446	17,28									
66	992	56648	0,017359	81072	1407	80369	1342693	16,56									
67	1026	50686	0,020039	79665	1596	78867	1262325	15,85									

Tabuľka 5. Modifikovaná základná úplná UT metódou (4) a (7), Slovensko 2014.

D _x	P _x	(2)	I _x	d _x	L _x	T _x	e _x										
0	318	55344	0,005729	100000	573	99484	7692942	76,93	68	917	44411	0,021089	78110	1647	77286	1183495	15,15
1	24	56068	0,000428	99427	43	99406	7593457	76,37	69	989	42825	0,022973	76463	1757	75584	1106209	14,47
2	19	58909	0,000322	99385	32	99368	7494052	75,40	70	1089	41384	0,025190	74706	1882	73765	1030625	13,80
3	6	59695	0,000101	99352	10	99347	7394683	74,43	71	1008	38957	0,025887	72824	1885	71882	956860	13,14
4	13	58949	0,000175	99342	17	99334	7295336	73,44	72	1125	37808	0,028290	70939	2007	69936	884978	12,48
5	13	58488	0,000113	99325	11	99319	7196002	72,45	73	1045	36436	0,030643	68932	2112	67876	815042	11,82
6	3	55784	0,000088	99314	9	99310	7096682	71,46	74	1276	33946	0,035256	66820	2356	65642	747166	11,18
7	2	54209	0,000097	99305	10	99300	6997373	70,46	75	1206	30965	0,038774	64464	2500	63214	681524	10,57
8	9	54232	0,000121	99296	12	99290	6898073	69,47	76	1278	28610	0,043172	61965	2675	60627	618310	9,98
9	7	54263	0,000104	99284	10	99278	6798783	68,48	77	1301	26714	0,047274	59289	2803	57888	557683	9,41
10	3	52836	0,000089	99273	9	99269	6699505	67,49	78	1371	25486	0,053241	56487	3007	54983	499795	8,85
11	5	51268	0,000077	99264	8	99261	6600236	66,49	79	1477	24149	0,059748	53479	3195	51882	444812	8,32
12	5	51212	0,000103	99257	10	99252	6500975	65,50	80	1598	22509	0,066651	50284	3351	48608	392931	7,81
13	5	53295	0,000138	99247	14	99240	6401723	64,50	81	1626	21490	0,074232	46932	3484	45191	344322	7,34
14	15	55503	0,000205	99233	20	99223	6302484	63,51	82	1721	19946	0,083666	43449	3635	41631	299132	6,88
15	12	56393	0,000257	99213	26	99200	6203261	62,52	83	1776	17895	0,092373	39813	3678	37975	257501	6,47
16	20	57699	0,000360	99187	36	99169	6104061	61,54	84	1683	15697	0,100933	36136	3647	34312	219526	6,08
17	26	59127	0,000411	99151	41	99131	6004892	60,56	85	1571	13518	0,112379	32488	3651	30663	185214	5,70
18	28	60337	0,000440	99111	44	99089	5905761	59,59	86	1545	11468	0,126836	28837	3658	27009	154551	5,36
19	25	63394	0,000420	99067	42	99046	5806672	58,61	87	1497	9725	0,139718	25180	3518	23421	127543	5,07
20	32	69072	0,000441	99025	44	99004	5707626	57,64	88	1334	7985	0,153495	21662	3325	19999	104122	4,81
21	29	72948	0,000446	98982	44	98960	5608622	56,66	89	1191	6633	0,168225	18337	3085	16794	84123	4,59
22	40	75294	0,000501	98938	50	98913	5509663	55,69	90	1154	5523	0,187474	15252	2859	13822	67328	4,41
23	38	77759	0,000496	98888	49	98863	5410750	54,72	91	979	4393	0,196294	12393	2433	11176	53506	4,32
24	43	78473	0,000518	98839	51	98813	5311887	53,74	92	822	3351	0,221858	9960	2210	8855	42330	4,25
25	37	79707	0,000522	98788	52	98762	5213073	52,77	93	542	2270	0,225880	7750	1751	6875	33474	4,32
26	47	81346	0,000526	98736	52	98710	5114311	51,80	94	480	1521	0,229932	6000	1380	5310	26599	4,43
27	44	82896	0,000506	98684	50	98659	5015601	50,82	95	167	858	0,213832	4620	988	4126	21289	4,61
28	40	85583	0,000551	98634	54	98607	4916942	49,85	96	112	448	0,209123	3632	760	3252	17163	4,73
29	56	87104	0,000650	98580	64	98548	4818334	48,88	97	81	344	0,189941	2873	546	2600	13911	4,84
30	66	87302	0,000674	98516	66	98483	4719786	47,91	98	51	294	0,196919	2327	458	2098	11311	4,86
31	61	87628	0,000676	98450	67	98416	4621303	46,94	99	57	244	0,208327	1869	389	1674	9213	4,93
32	55	87873	0,000743	98383	73	98347	4522887	45,97	100	115	586	0,249103	1479	1479	7539	7539	5,10
33	76	88491	0,000804	98310	79	98270	4424541	45,01									
34	87	91167	0,000856	98231	84	98189	4326270	44,04									
35	73	92991	0,000943	98147	93	98101	4228081	43,08									
36	108	92396	0,001122	98054	110	97999	4129981	42,12									
37	120	91987	0,001286	97944	126	97881	4031981	41,17									
38	122	90813	0,001345	97818	132	97753	3934100	40,22									
39	138	89774	0,001407	97687	137	97618	3836347	39,27									
40	115	87358	0,001527	97549	149	97475	3738729	38,33									
41	145	82539	0,001694	97400	165	97318	3641255	37,38									
42	158	77788	0,001875	97235	182	97144	3543937	36,45									
43	136	74378	0,002028	97053	197	96955	3446793	35,51									
44	184	72598	0,002450	96856	237	96738	3349838	34,59									
45	187	70230	0,002772	96619	268	96485	3253100	33,67									
46	229	68766	0,003159	96351	304	96199	3156616	32,76									
47	232	70269	0,003278	96047	315	95889	3060417	31,86									
48	264	72558	0,003660	95732	350	95557	2964527	30,97									
49	283	74876	0,004013	95382	383	95190	2868971	30,08									
50	368	75556	0,004570	94999	434	94782	2773781	29,20									
51	345	73434	0,004768	94565	451	94339	2678999	28,33									
52	396	73048	0,005238	94114	493	93867	2584660	27,46									
53	404	74062	0,005791	93621	542	93350	2490793	26,61									
54	500	73333	0,006638	93078	618	92770	2397443	25,76									
55	564	74155	0,007613	92461	704	92109	2304674	24,93									
56	636	76478	0,008444	91757	775	91369	2212565	24,11									
57	760	77944	0,009154	90982	833	90566	2121195	23,31									
58	733	78039	0,009653	90149	870	89714	2030630	22,53									
59	804	76450	0,010565	89279	943	88807	1940916	21,74									
60	876	74484	0,011747	88336	1038	87817	1852108	20,97									
61	946	73381	0,012849	87298	1122	86737	1764291	20,21									
62	1032	72047	0,013835	86176	1192	85580	1677554	19,47									
63	995	68812	0,014605	84984	1241	84364	1591974	18,73									
64	995	63464	0,015399	83743	1290	83098	1507610	18,00									
65	987	59292	0,016548	82453	1364	81771	1424512	17,28									
66	992	56648	0,017794	81089	1443	80368	1342741	16,56									
67	1026	50686	0,019288	79646	1536	78878	1262373	15,85									

Tabuľka 6. Modifikovaná základná úplná UT metódou (7) a (8), Slovensko 2014.

	q _x	l _x	d _x	L _x	T _x	e _x							
0	0,005729	100000	573	99484	7678788	76,79	58	0,009653	90149	870	89714	2016476	22,37
1	0,000428	99427	43	99406	7579304	76,23	59	0,010565	89279	943	88807	1926762	21,58
2	0,000322	99385	32	99368	7479898	75,26	60	0,011747	88336	1038	87817	1837955	20,81
3	0,000101	99352	10	99347	7380529	74,29	61	0,012849	87298	1122	86737	1750138	20,05
4	0,000175	99342	17	99334	7281182	73,29	62	0,013835	86176	1192	85580	1663400	19,30
5	0,000113	99325	11	99319	7181848	72,31	63	0,014605	84984	1241	84364	1577820	18,57
6	0,000088	99314	9	99310	7082529	71,31	64	0,015399	83743	1290	83098	1493457	17,83
7	0,000097	99305	10	99300	6983219	70,32	65	0,016548	82453	1364	81771	1410358	17,10
8	0,000121	99296	12	99290	6883919	69,33	66	0,017794	81089	1443	80368	1328587	16,38
9	0,000104	99284	10	99278	6784629	68,34	67	0,019288	79646	1536	78878	1248220	15,67
10	0,000089	99273	9	99269	6685351	67,34	68	0,021089	78110	1647	77286	1169342	14,97
11	0,000077	99264	8	99261	6586082	66,35	69	0,022973	76463	1757	75584	1092055	14,28
12	0,000103	99257	10	99252	6486821	65,35	70	0,025190	74706	1882	73765	1016471	13,61
13	0,000138	99247	14	99240	6387570	64,36	71	0,025887	72824	1885	71882	942706	12,94
14	0,000205	99233	20	99223	6288330	63,37	72	0,028290	70939	2007	69936	870824	12,28
15	0,000257	99213	26	99200	6189107	62,38	73	0,030643	68932	2112	67876	800889	11,62
16	0,000360	99187	36	99169	6089907	61,40	74	0,035256	66820	2356	65642	733013	10,97
17	0,000411	99151	41	99131	5990738	60,42	75	0,038774	64464	2500	63214	667371	10,35
18	0,000440	99111	44	99089	5891607	59,44	76	0,043172	61965	2675	60627	604156	9,75
19	0,000420	99067	42	99046	5792518	58,47	77	0,047274	59289	2803	57888	543529	9,17
20	0,000441	99025	44	99004	5693472	57,50	78	0,053241	56487	3007	54983	485641	8,60
21	0,000446	98982	44	98960	5594469	56,52	79	0,059748	53479	3195	51882	430658	8,05
22	0,000501	98938	50	98913	5495509	55,55	80	0,066651	50284	3351	48608	378777	7,53
23	0,000496	98888	49	98863	5396596	54,57	81	0,074232	46932	3484	45191	330169	7,03
24	0,000518	98839	51	98813	5297733	53,60	82	0,083666	43449	3635	41631	284978	6,56
25	0,000522	98788	52	98762	5198919	52,63	83	0,092373	39813	3678	37975	243347	6,11
26	0,000526	98736	52	98710	5100157	51,65	84	0,100933	36136	3647	34312	205372	5,68
27	0,000506	98684	50	98659	5001447	50,68	85	0,112379	32488	3651	30663	171060	5,27
28	0,000551	98634	54	98607	4902788	49,71	86	0,125157	28837	3609	27033	140397	4,87
29	0,000650	98580	64	98548	4804180	48,73	87	0,139263	25228	3513	23472	113365	4,49
30	0,000674	98516	66	98483	4705632	47,77	88	0,154887	21715	3363	20033	89893	4,14
31	0,000676	98450	67	98416	4607150	46,80	89	0,172156	18351	3159	16772	69860	3,81
32	0,000743	98383	73	98347	4508733	45,83	90	0,191195	15192	2905	13740	53088	3,49
33	0,000804	98310	79	98270	4410387	44,86	91	0,212128	12288	2607	10984	39348	3,20
34	0,000856	98231	84	98189	4312116	43,90	92	0,235071	9681	2276	8543	28364	2,93
35	0,000943	98147	93	98101	4213927	42,93	93	0,260127	7405	1926	6442	19821	2,68
36	0,001122	98054	110	97999	4115827	41,97	94	0,287383	5479	1575	4692	13379	2,44
37	0,001286	97944	126	97881	4017827	41,02	95	0,316899	3904	1237	3286	8687	2,22
38	0,001345	97818	132	97753	3919946	40,07	96	0,348700	2667	930	2202	5401	2,03
39	0,001407	97687	137	97618	3822194	39,13	97	0,382769	1737	665	1405	3199	1,84
40	0,001527	97549	149	97475	3724576	38,18	98	0,419034	1072	449	848	1795	1,67
41	0,001694	97400	165	97318	3627101	37,24	99	0,457356	623	285	480	947	1,52
42	0,001875	97235	182	97144	3529783	36,30	100	0,497524	338	168	254	467	1,38
43	0,002028	97053	197	96955	3432639	35,37	101	0,539241	170	92	124	213	1,25
44	0,002450	96856	237	96738	3335684	34,44	102	0,582119	78	46	55	89	1,13
45	0,002772	96619	268	96485	3238947	33,52	103	0,625680	33	20	22	33	1,02
46	0,003159	96351	304	96199	3142462	32,61	104	0,669354	12	8	8	11	0,88
47	0,003278	96047	315	95889	3046263	31,72	105	0,712498	4	3	3	3	0,64
48	0,003660	95732	350	95557	2950374	30,82							
49	0,004013	95382	383	95190	2854817	29,93							
50	0,004570	94999	434	94782	2759627	29,05							
51	0,004768	94565	451	94339	2664845	28,18							
52	0,005238	94114	493	93867	2570506	27,31							
53	0,005791	93621	542	93350	2476639	26,45							
54	0,006638	93078	618	92770	2383289	25,61							
55	0,007613	92461	704	92109	2290520	24,77							
56	0,008444	91757	775	91369	2198411	23,96							
57	0,009154	90982	833	90566	2107042	23,16							

Tabuľka 7.: Zoznam modelov na extrapoláciu úmrtnosti v publikácii v [11]

A. de Moivre (1725)	$\mu(x)$	$\frac{1}{(\omega - x)}$
Gompertz (1825)	$\mu(x)$	Bc^x
Makeham (1860)	$\mu(x)$	$A + Bc^x$
	$\mu(x)$	$\alpha + \gamma x + \beta c^x$
Opperman (1870)	$\mu(x)$	$\frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$
Thiele (1872)	$\mu(x)$	$a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{-\frac{1}{2}b_2(x-c)^2} + a_3 e^{b_3 x}$
Wittstein (1883)	q_x	$\frac{1}{m} a^{-(mx)^n} + a^{-(M-x)^n}$
Steffenson (1930)	$\log_{10} l(x)$	$10^{-A\sqrt{x} - B} + C$
Perks (1932)	$\mu(x)$	$\frac{A + Bc^x}{kc^{-x} + 1 + Dc^x}$
Harper (1936)	$\log_{10} l(x)$	$A + 10^{B\sqrt{x} + Cx + D}$
Weibull (1939)	$\mu(x)$	$\alpha x^{\beta-1}$
van der Maen (1943)	$\mu(x)$	$A + Bx + Cx^2 + \frac{I}{N - x}$
	$\mu(x)$	$A + Bc^x + \frac{c}{N - x}$
Steffenson (in Keyfitz, 1982)	$e(x)$	$\frac{1}{A + Bc^x}$
Unnamed	$\ln \mu(x)$	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$
Anson (1991)	$-\ln(l(x))$	$\frac{1}{5} [\sigma(x - \xi)]^5 - \frac{1}{3} \phi[\sigma(x - \xi)]^3 +$ $\frac{1}{2} \tau[\sigma(x - \xi)]^2 + \lambda \sigma(x - \xi) + \delta$
Hardy (in Keyfitz, 1982)	$e(x)$	$e^{a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4}$
Unnamed (in Keyfitz, 1982)	$\frac{q_x}{p_x}$	$\exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k)$
Brillinger (1960)	$\mu(x)$	$\sum_i \left(H_i (x - B_i)^{C_i - 1} + \frac{A_i}{(b_i - x)^{C_i + 1}} + E_i d_i^x \right)$
Beard (1961)	$\mu(x)$	$\frac{Be^{ux}}{1 + De^{ux}}$

Martinelle (1987)	$\mu(x)$	$\frac{A + Be^{kx}}{1 + De^{kx}} + c e^{kx}$
Petrioli (1981)	$l(x)$	$\frac{1}{x^a (\omega - x)^{-b} e^{\frac{c}{2}x^2 + dx} \frac{1}{k} + 1}$
British actuaries (in Keyfitz, 1982)	$\frac{q(x)}{p(x)}$	$A - Hx + Bc^x$
Siller (1979)	$\mu(x)$	$a_1 e^{-b_1 t} + a_2 + a_3 e^{b_3 t}$
Heligman-Pollard (1980)	$\frac{q_x}{p_x}$	$A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$
Heligman-Pollard (1980)	q_x	$A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x}$
Heligman-Pollard (1980)	q_x	$A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x}$
Heligman-Pollard (1980)	q_x	$A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^{x^K}}{1 + GH^{x^K}}$
Brooks (1980)	$\mu(x)$	$\mu_I(x) + \mu_A(x) + \mu_S(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu_I(x) = \begin{cases} Q_0 & \text{for } x = 0 \\ Q_I^{x'} & \text{for } x > 0 \end{cases} \\ \mu_A(x) = Q_A e^{-\frac{1}{\sigma^2}(\ln x - \ln x_A)^2} \quad \text{for } x \geq 0 \\ \mu_S(x) = \frac{Q_S e^{\frac{x}{x_S}}}{1 + Q_S e^{\frac{x}{x_S}}} \quad \text{for } x \geq 0 \end{array} \right.$
Kostaki (1992)	$\frac{q_x}{p_x}$	$\begin{cases} A^{(x+B)^C} + D e^{-E_1^2 (\log x/F)^2} + GH^x, & \text{for } x \leq F \\ A^{(x+B)^C} + D e^{-E_2^2 (\log x/F)^2} + GH^x, & \text{for } x > F \end{cases}$
Rogers and Planck (1983)	$q(x)$	$A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2) - e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + A_3 e^{\alpha_3 x}$
Hartmann (1981)	- child mortality (0-15 > : $Y(x) \quad A_1 + B_1 \ln x, \quad \text{where } Y(x) - \text{logits of } l(x)$ - mortality at reproductive ages (15-35 > : $Y(x) \quad A_2 + B_2 x \quad \text{where } Y(x) - \text{logits of } l(x)$ - old age mortality (35-60 > : $Y(x) \quad A + Bc^x \quad \text{where } Y(x) - \text{logits of } l(x)$	

Mode and Busby
(1982)

- early life mortality (0, 10):

$$\mu_0(x) \quad \alpha_0 \beta_0 e^{-\beta_0 x}$$

- middle-life mortality (10, 30):

$$\mu_1(x) \quad \alpha_1 - \beta_1 (x - \gamma_1)^2$$

- late-life mortality (30+):

$$\mu_2(x) \quad \alpha_2 + \beta_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 x}$$

Literatúra

- [1] Buettner, T.: Approaches and experiences in projecting mortality patterns for the oldest-old. North American Actuarial Journal. 2002, 6/3.
- [2] Burcin, B.-Tesárková, K.-Šidlo, L.: Najpoužívanější metody vyrovnání a extrapolace křivky úmrtnosti a jejich aplikace na Českou populaci. Demografie. 2010, 52/2.
- [3] Coelho, E.-Magalhaes, M.G.-Bravo, J.M.: Mortality and longevity projection for the oldest-old in Portugal. Proceedings of the Joint Eurostat/UNECE (United Nations Statistical Commission and Statistical Office of the Economic Commission for Europe). Work Session on Demographic Projections, Bucharest, Romania, pp. 117-132
- [4] Hartmannová, H.-Fesenko, P.: Úmrtnostní tabulky 1970. Demografie. 1973, 15.
- [5] Koshin, F.: Jak vysoká je intenzita úmrtnosti na konci lidského života? Demografie. 1999, 41.
- [6] Mészáros, J.: Výpočet úmrtnostných tabuliek. Výpočet stratených rokov života úmrtím. Metodický materiál. Infostat Bratislava
- [7] Pastor, K.: A cubic model for graduation of life tables. Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics. 2007, 3/2.
- [8] Pastor, K.: Intervaly spoľahlivosti v úmrtnostných tabuľkách. In: Poistná matematika v teórii a v praxi. Zborník príspevkov. Bratislava 1997 KM FHI EU Bratislava, SSA.
- [9] Pecka, J.: Príspevek k problematice výpočtu československých úmrtnostných tabulek. Demografie. 1989, 31.
- [10] Thatcher, A.R.-Kannisto, V.-Vaupel, J.W.: The force of mortality at age 80 to 120. Odense University Press. 1999.
- [11] Wunsch, G.-Mouchart, M.-Duchene, J.: The life table. Modelling survival and death. European Assosiation for Population Studies. Kluwer Academic Publishers. 2002 London.
- [12] Coal, A.-Demeny, P.-Vaughan, B.: Regional Model Life tables and Stable Population. 1983, Elsevier Inc.
- [13] Toson, B.-Baker, A.: Life Expectancy at Birth: Methodological Options for Small Population. 2003. Office for National Statistics. Crown copyright.